- Cours pour les absents -

Fonctions usuelles

V. Fonctions hyperboliques.

Définition :

$x \in \mathbb{R}$, on pose

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{cosinus hyperbolique de } x$$

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{sinus hyperbolique de } x.$$

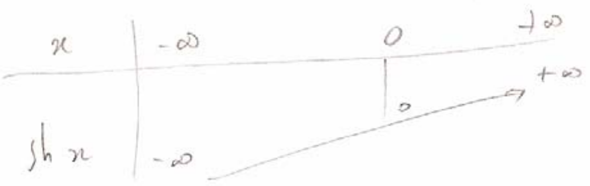
et on définit les fonctions :

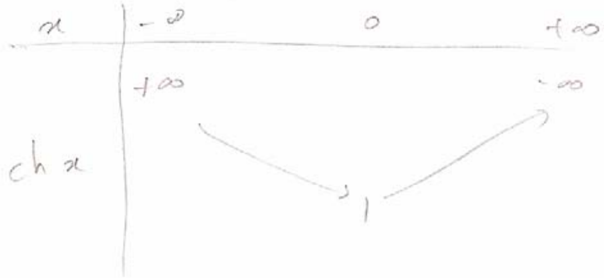
$$ch : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ch(x) \end{array}$$

$$sh : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto sh(x) \end{array}$$

Propriétés :

1) Sh est impaire, ch est paire.
2) ch est strictement positif.
3) sh (resp ch) est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   et $sh' = ch$ $\quad ch' = ch$
4) Sens de variation : sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
   donc $sh\,x$ est du signe de x.
   ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$





$\forall x \in \mathbb{R}$

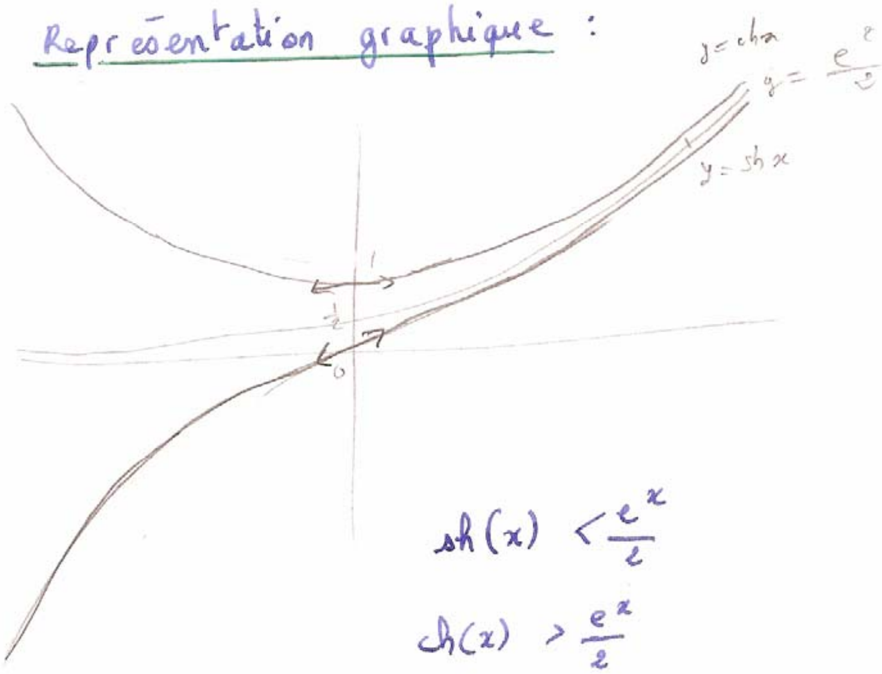
$\operatorname{ch}(x) \geq 1 \qquad 1 = \operatorname{ch}(0)$

5) Limites

$\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$

Représentation graphique :



$\operatorname{sh}(x) < \frac{e^x}{2}$

$\operatorname{ch}(x) > \frac{e^x}{2}$

$\operatorname{ch}'(0) = \operatorname{sh}(0) = 0$

$\operatorname{sh}'(0) = \operatorname{ch}(0) = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(sh(x) - \frac{e^x}{2} \right) = 0 \quad \text{car } sh(x) - \frac{e^x}{2} = \frac{e^{-x}}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(ch(x) - \frac{e^x}{2} \right) = 0 \quad \text{car } ch(x) - \frac{e^x}{2} = \frac{e^{-x}}{2}$$

Formules trigonométriques hyperboliques

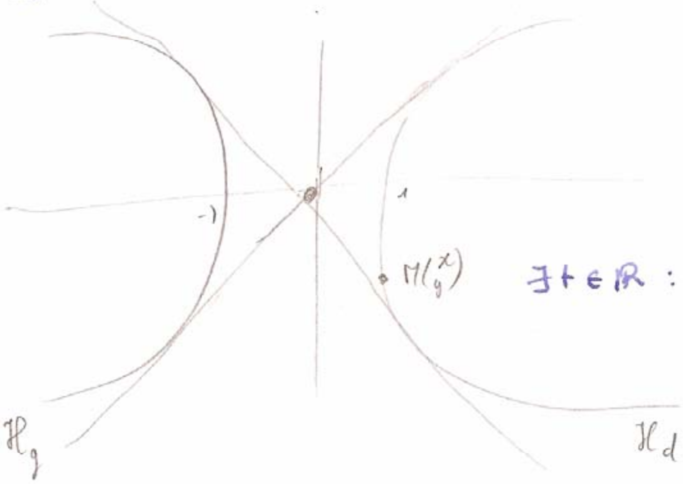
$\forall x \in \mathbb{R} \quad sh(x) + ch(x) = e^x$

$\qquad\qquad ch(x) - sh(x) = e^{-x}$

d'où $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

Interprétation géométrique

$\mathcal{H} \quad x^2 - y^2 = 1$ hyperbole équilatère.



$\exists t \in \mathbb{R} : \ x = ch(t)$
$\qquad\qquad\quad y = sh(t)$

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_g \cap \mathcal{H}_d$

$\mathcal{H}_d \begin{cases} x = ch(t) \\ y = sh(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$\mathcal{H}_g \begin{cases} x = -ch(t) \\ y = -ch(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Développer pour $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)-\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)$$

$$= 2ab + \frac{2}{ab}$$

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(b-\frac{1}{b}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$$= 2ab - \frac{2}{ab}$$

Calculer $\mathrm{ch}\,(x+y)$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\mathrm{ch}(x+y) = \frac{\exp(x+y)+\exp(y-x)}{2}$$

$$= \frac{\exp(x)\exp(y)+\exp(y)\exp(-x)}{2}$$

$$= \frac{\exp(y)\left(\exp(x)+\exp(-x)\right)}{2}$$

$$= \exp(y)\cdot \ldots$$

$$\mathrm{ch}\,(x+y) = \frac{e^x e^y + \frac{1}{e^x e^y}}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^y+e^{-y}\right)+\frac{1}{4}\left(e^x-e^{-2x}\right)\left(e^y-e^{-y}\right)$$

en posant :
$a = e^x \neq 0$
$b = e^y \neq 0$

$$= \frac{1}{4}\left[4\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + 4\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)\right]$$

$ch(x+y) = ch(x)\,ch(y) + sh(x)\,sh(y)$

$sh(x+y) = sh(x)\,ch(y) + sh(y)\,ch(x)$

$ch(x-y) = ch(x)\,ch(y) - sh(x)\,sh(y)$

$sh(x-y) = sh(x)\,ch(y) - sh(y)\,ch(x)$

en utilisant ch paire et sh impaire.

$sh(2x) = 2sh(x) \cdot ch(x)$

$ch(2x) = 2ch^2(x) - 1 = 1 + 2sh^2(x)$.

astuce pour retrouver les formules en hyperbolique à partir de trigonométrie usuelle, remplacer cos par ch et simplifier.

Tangente hyperbolique.

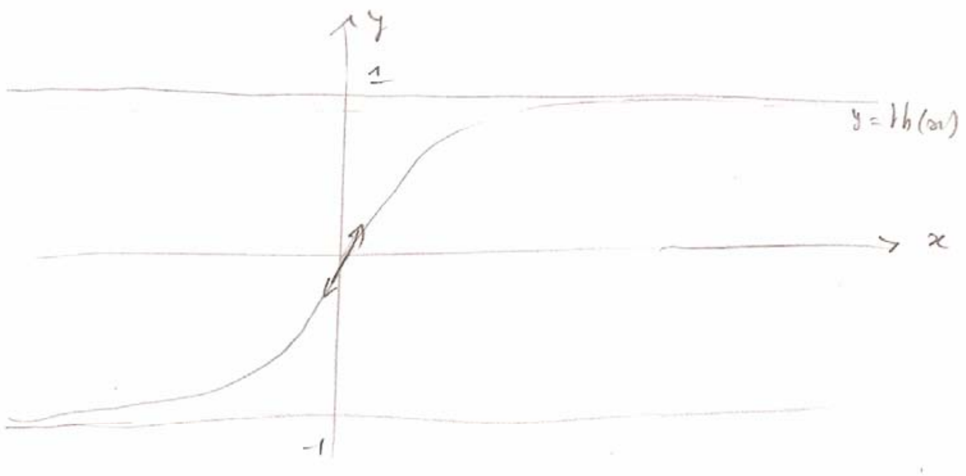
Définition:

$\forall x \in \mathbb{R}$, on pose $th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$ et on appelle tangente hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ ~~par~~ notée th : $x \mapsto th(x)$.

Propriétés:

1) th est impaire : $th(0) = 0$
2) th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $th'(x) = 1 - th^2(x) = \dfrac{1}{ch^2(x)}$
3) Sens de variation et signe :
   th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $th(x)$ est du signe de x
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} th(x) = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} th(x) = -1$

Représentation graphique :



$th'(0) = 1$

Remarque :

$$th(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Fonctions réciproques de sh, ch, th

- sh est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc admet une fonction réciproque notée Argsh.

  $sh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc $Argsh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- ch est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

  D'où $Argch : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$

- Et de même, th est bijective sur $\mathbb{R}$. et admet une fonction réciproque.

  $Argth :]-1, 1[\to \mathbb{R}$

VI. Croissance comparée

Soient α, β deux réels strictement positifs.

Alors :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ ex : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\pi}{x^{\sqrt{2}}} = 0$

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$ ex : $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{1/8} |\ln x|^{e \cdot \frac{\pi}{4}} = 0$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$ ex : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\pi x}}{x^4} = +\infty$

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$.

Preuve :

1) Pour x suffisamment grand.

$$\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha = \left(\frac{\ln(x^{\beta/\alpha})}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha$$

on pose $y = x^{\beta/\alpha} = e^{\frac{\beta}{\alpha}\ln x}$

Si $x \to +\infty$, $y \to +\infty$ et $\frac{\ln y}{y} \to 0$ par croissance comparée.

Donc par composition de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$

2) On pose $y = \frac{1}{x}$ dans 2.

donc $y \to +\infty$ car $x \to 0^+$

$$x^\beta |\ln x|^\alpha = \frac{(\ln y)^\alpha}{y^\beta} \xrightarrow[y \to +\infty]{} 0 \text{ d'après 1.}$$

3) On pose $x = \ln y$ dans ②.

$x \to +\infty \Leftrightarrow y \to +\infty$

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^{\beta}} = \frac{e^{\alpha \ln y}}{(\ln y)^{\beta}} = \frac{y^{\alpha}}{(\ln y)^{\beta}} \to +\infty$$ d'après 1 et le signe

4) on pose $x = \ln y$ $y \to 0^+$.

$\square$

Autres cas :

- si $\alpha < 0$ et $\beta < 0$ on se ramène aux cas précédents en prenant l'inverse.

- si $\alpha\beta < 0$ pas de forme indéterminée.

VII. Exponentielle complexe.

Rappel :

Pour $z = x + iy$ $e^{z} = e^{x} e^{iy}$.

"Définition" :

On pose pour $t \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$

$t \mapsto e^{tz}$

$\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Calculer la dérivée de cette ~~expression~~ fonction.

Définition :

Soit $f : \mathbb{R}^{(I)} \to \mathbb{C}$

On pose $g = \mathrm{Re}(f)$
$h = \mathrm{Im}(f)$.

g et h sont des fonctions à valeurs réelles.

$f = g + ih$.

On dit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (I) si g et h le sont et on pose $f' = g' + ih'$

Exemple :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{tz} \end{aligned}$$
f

f est-elle dérivable ?

$g : t \mapsto e^{tx} \cos(ty)$ $\quad z = x + iy$.

$h : t \mapsto e^{tx} \sin(ty)$

$$e^{tz} = e^{tx} e^{ity} = e^{tx} \left(\cos(ty) + i \sin(ty) \right)$$

g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall t \in \mathbb{R}$:

$$g'(t) = -y \sin(ty) e^{tx} + x \cos(ty) e^{tx}$$

$$h'(t) = y \cos(ty) e^{tx} + x \sin(ty) e^{tx}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= g'(t) + i h'(t). \\ &= x e^{tx} \left(\cos(ty) + i \sin(ty) \right) + y e^{tx} \left(-\sin(ty) + i \cos(ty) \right) \end{aligned}$$

$$f'(t) = x e^{tx}\left(\cos(ty) + i\sin(ty)\right) + iy e^{tx}\left(i\sin(ty) + \cos(ty)\right)$$
$$= x e^{tx} e^{ity} + iy e^{tx} e^{ity}$$
$$= x e^{t(x+iy)} + iy e^{t(x+iy)}$$
$$= x e^{tz} + iy e^{tz} = z e^{tz}.$$

plus généralement :

Proposition :

Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors la fonction $I \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{\varphi(t)}$

est dérivable sur I et

$\forall t \in I,\ \psi'(t) = \varphi'(t)\, e^{\varphi(t)}$.

Preuve :

idem $\square$.

FIN !!