- Cours pour les absents -

Equations différentielles linéaires (4)

Correction de l'exercice de cours :
Rappel de l'énoncé :

Sur $\mathbb{R}$
$x(x-1)y' + (2x-1)y = 1$.

On étudie sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$.

1^{er} cas : sur $]1 ; +\infty[= I_1$

$$(E) \Leftrightarrow y' + \frac{2x-1}{x(x-1)} y = \frac{1}{x(x-1)}$$

$$(H) \quad y' + \frac{2x-1}{x(x-1)} y = 0$$

$$\int \frac{2x-1}{x(x-1)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + cte = \ln|x^2 - x| \qquad u = x^2 - x \quad du = (2x-1)\, dx.$$

Désolé, j'ai raté ici un bout de la correction...

- Recherche d'une solution particulière de (E) :

on pose : $y(x) = \dfrac{C(x)}{x^2-x} \qquad y_0(x) = \dfrac{1}{x^2-x}$

$$y(x) = C(x)\, y_0(x)$$

$$y'(x) = C'(x)\, y_0(x) + C(x)\, y_0'(x)$$

$$y_0'(x) = -\frac{2x-1}{x(x-1)} y_0(x) \text{ car } y_0 \text{ solution de } (H).$$

D'où $y'(x) = C'(x)\, y_0(x) - \dfrac{2x-1}{x(x-1)} y_0(x)\, C(x)$.

$$y \text{ sol de } (E) \Leftrightarrow C(x)\, y_0 + \frac{2x-1}{x(x-1)} \left(C'(x)\, y_0(x) - \frac{2x-1}{x(x-1)} y_0(x)\, C(x) \right) = \frac{1}{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow C'(x)\, y_0 = \frac{1}{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow C'(x) = 1$$

$$\not\Leftrightarrow C(x) = x \text{ convient.}$$

Une solution peut être $x \mapsto \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{C}{x^2-x}$ $(C \in \mathbb{R})$ $]1, +\infty[\to \mathbb{R}$.

De même sur $]0, 1[= I_2$

La solution générale de E) est $x \mapsto \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{A}{x^2-x}$ $(A \in \mathbb{R})$

De même sur $]-1, +\infty[= I_1$

$x \mapsto \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{B}{x^2-x}$ $(B \in \mathbb{R})$.

Problème du raccord : existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$.

Analyse :
supposons que y soit solution sur $\mathbb{R}$,
comme y est solution sur $\mathbb{R}$, y est solution sur I_1, I_2, I_3.

Donc $y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{B}{x^2-x} & \text{sur } I_1 \\ \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{A}{x^2-x} & \text{sur } I_2 \\ \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{C}{x^2-x} & \text{sur } I_3 \end{cases}$

Comme y est solution, y est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier en 0. Donc $\lim\limits_{x\to 0} y(x)$ existe et vaut $y(0)$.

or $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{B}{x^2-x}\right)$ est finie et vaut 1 si $B=0$ donc $B=0$ et de même $A=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = -1$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = -1$.

On en déduit $y(0) = -1$.

De même y est continue en 1

$\lim\limits_{x\to 1^-} y(x) = 0$

donc y n'est pas continue en 1 ↯ car y solution sur $\mathbb{R} \Rightarrow y$ continue sur $\mathbb{R}$.

Il n'y a donc pas de solutions sur $\mathbb{R}$.

4. La méthode d'Euler.

III. Equations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants.

Cadre : I un intervalle (contenant au moins 2 points).

$(a,b,c) \in K^3$ où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$a \neq 0$.

(E) : $ay'' + by' + cy = f$

f fonction de type exponentielle x polynômes.

Exemples : $f(x) = e^{3x}(x^2+4x)$

$f(x) = 1$

$f(x) = e^{3ix}(x^2+4i)$

$f(x) = \cos 3x = \dfrac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}$

$f(x) = \operatorname{ch} 3x$

$f(x) = \operatorname{th}(x^2+1)$.

Définition.

(E) est une EDL 2^{nd} ordre, à coefficients constants, f est son second membre.

(H) $ay'' + by' + cy = 0$ est l'équation homogène associée à (E).

On dit que $g : I \to K$ est solution de (E) si

1. g est deux fois dérivable sur I.
2. $ag''(x) + bg'(x) + cg(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

1. structure de l'ensemble des solutions.

PROPOSITION

1) Si y_1 et y_2 sont solutions de (E) alors $y_1 - y_2$ est solution de (H).

2) Si y_1 est solution de (E) et y_3 solution de (H) alors $y_1 + y_3$ est solution de (E).

Ainsi la solution de (E) est obtenu en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale de (H).

PRINCIPE DE SUPERPOSITION DES SOLUTIONS.

idem EDL 1^{er} ordre.

2. Solutions de (H).

Proposition :

L'ensemble S_H est un K-espace-vectoriel (en fait un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables sur I).

i.e $\forall y_1$ et y_2 solutions de (H). $\forall \alpha \in K$.

Alors $y_1 + y_2 \in S_H$

$\alpha y_1 \in S_H$

Remarque :

0 est toujours solution de (H)

PROPOSITION - DEFINITION.

L'équation caractéristique de $ay''+by'+cy=0$ est $ar^2+br+c=0$ (polynôme de degré 2 en r, car $a\neq 0$)

Soit $r \in K$.

$\begin{array}{l} I \to K \\ x \mapsto e^{rx} \end{array}$ est solution de (H) $\Leftrightarrow$ r est solution caractéristique.

Exemple :

$y''-y=0$ équation caractéristique : $r^2-1=0 \Leftrightarrow r=\pm 1$

$x \mapsto e^{-x}$ $x \mapsto e^{x}$.

Preuve :

On pose $g(x)=e^{rx}$, $r\in K$, $x \in I$.

g est deux fois dérivable sur I

$g'(x)=re^{rx}$ et $g''(x)=r^2e^{rx}$ $\forall x \in I$

$ag''(x)+bg'(x)+cg(x)=0 \Leftrightarrow ar^2e^{rx}+bre^{rx}+ce^{rx}=0$

$\Leftrightarrow e^{rx}(ar^2+br+c)=0$

$\Leftrightarrow ar^2+br+c=0$ car $e^{rx}\neq 0$ $\forall x \in I$. □

Lemme :

Soit r_0 une solution de l'équation caractéristique.

Soit y une fonction dérivable deux fois sur I.

Soit z la fonction définie sur I par $y(x)=e^{r_0x}z(x)$.

y est solution de (H) $\Leftrightarrow$ $z''(x)+\left(2r_0+\frac{b}{a}\right)z'(x)=0$

Preuve :

y est deux fois dérivable comme produit de fonctions deux fois dérivables sur I : z et $x\mapsto e^{r_0x}$

$y'(x)=e^{r_0x}(r_0z(x)+z'(x))$

$y''(x)=e^{r_0x}(r_0^2z(x)+r_0z'(x)+r_0z'(x)+z''(x))$

d'où $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0$

$\Leftrightarrow ar_0^2z+2ar_0z'+az''+br_0z+bz'+cz=0$

$\Leftrightarrow az''+z'(2ar_0+b)+\underbrace{(ar_0^2+br_0+c)}_{=0}z=0$

$\Leftrightarrow az''+(2ar_0+b)z'=0$

$\Leftrightarrow z''+\left(2r_0+\frac{b}{a}\right)z=0$

□

a. solutions complexes de (H) $K=\mathbb{C}$.

THEOREME :

1er cas : si l'équation caractéristique admet 2 solutions r_1 et r_2 distinctes. Alors la solution générale de (H) est : $I\to\mathbb{C}$ $x\mapsto Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$ avec $(A,B)\in\mathbb{C}^2$

2e cas : si l'équation caractéristique admet une unique solution r_0 alors la solution générale de (H) est : $I\to\mathbb{C}$

$x\mapsto(A+Bx)e^{r_0x}$ avec $(A,B)\in\mathbb{C}^2$.

Preuve :

1er cas :

On pose : $y(x) = e^{r_1 x} \cdot z(x)$

alors lemme : y solution de (H) $\Leftrightarrow z'' + \left(\frac{b}{a} + 2r_1\right) z'(x) = 0$.

Or r_1, r_2 solutions de l'équation caractéristique }
Relation coefficients/racines :

$\Rightarrow r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad r_1 r_2 = \frac{c}{a}$

y solution de (H) $\Leftrightarrow z'' + (r_1 - r_2) z'(x) = 0$
EDL du 1er ordre en z'

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C},\ z'(x) = \lambda e^{(r_2 - r_1)x}$

$\Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2,\ z(x) = \alpha e^{(r_2 - r_1)x} + \beta$

$\Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2,\ y(x) = \alpha e^{r_2 x} + \beta e^{r_1 x}$ □

2e cas :

r_0 solution unique de l'équation caractéristique.

On pose $y(x) = e^{r_0 x} z(x)$

lemme $\Rightarrow$ y solution de (H) $\Leftrightarrow z'' + \left(\frac{b}{a} + 2r_0\right) z' = 0$

or r_0 solution double de l'équation caractéristique.

$\Rightarrow r_0 = -\frac{b}{2a}$ d'où y solution de (H) $\Leftrightarrow z'' = 0$

$\Leftrightarrow z' = C$ avec $C \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow z(x) = Cx + D$ avec $(C, D) \in \mathbb{C}^2$

$\Leftrightarrow y(x) = (Cx + D) e^{r_0 x}$ □

Exercice :

a) $y'' - 5y' = 0$

$x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -5$

$y(x) = A + Be^{5x} \quad (A, B) \in \mathbb{C}^2$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 3$ $\quad (x^2 - Sx + P = 0)$

$y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $x^2 + 4x + 13 = 0 \Leftrightarrow x = -2 + 3i$ ou $x = -2 - 3i$.

$y(x) = e^{-2x}(Ae^{3ix} + Be^{-3ix})$.