- Cours de mathématiques du lundi 2 octobre 2006 -

Géométrie dans l'espace

Proposition :

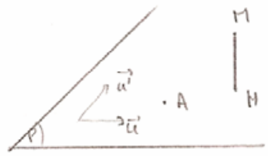
P le plan $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

M un point.

Alors $d(M, P) = \dfrac{|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.

Preuve.

$\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{u}') = \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{AM}) \underset{\text{déf}}{=} \vec{u} \wedge \vec{u}' \cdot \overrightarrow{AM}$



$= \vec{u} \wedge \vec{u}' \cdot \overrightarrow{AH} + \vec{u} \wedge \vec{u}' \cdot \overrightarrow{HM}$ où H est le projeté orthogonal de M sur P

$|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{u}')| = |\vec{u} \wedge \vec{u}' \cdot \overrightarrow{HM}|$

$= \|\vec{u} \wedge \vec{u}'\| \cdot \|\overrightarrow{HM}\| \cdot \underbrace{|\cos(\vec{u} \wedge \vec{u}', \overrightarrow{HM})|}_{1}$

$\dfrac{|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{u}')|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|} = HM = d(M, P)$ $\square$

Distance droite plan dans l'espace.

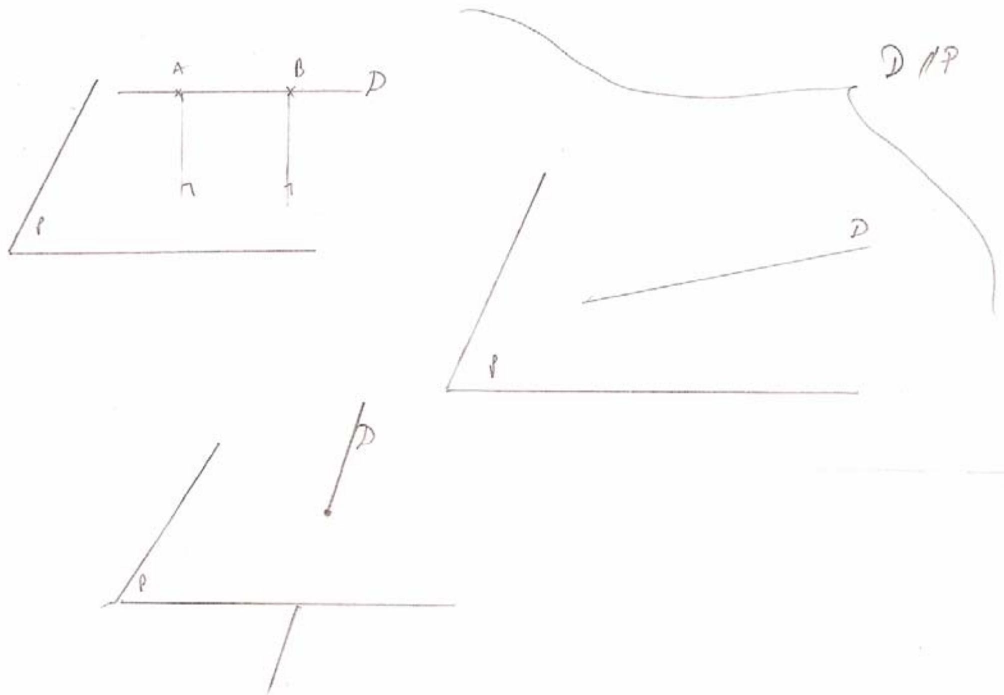
Remarque :

D droite, P plan : alors :

Soit $D \cap P \neq \emptyset$ $\}$ on dit que D est parallèle à P.

Soit $D \cap P = D$

Soit $D \cap P$ est réduit à un point



Proposition :

Si $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ alors $d(A,\mathcal{P})$ est indépendante de $A \in \mathcal{D}$ i.e. $\forall (A,B) \in \mathcal{D}^2,\ d(A,\mathcal{P}) = d(B,\mathcal{P})$

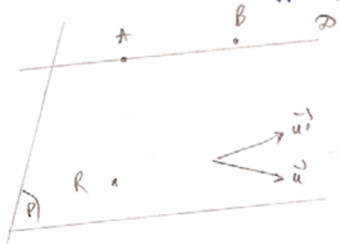
Preuve :

- Si $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ et $\mathcal{D} /\!/ \mathcal{P}$ alors $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$

$$\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{D},\ d(A,\mathcal{P}) = 0 \\ B \in \mathcal{D},\ d(B,\mathcal{P}) = 0 \end{array}\right\}$$

- Si $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$

$$d(A,\mathcal{P}) = \frac{|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AR}, \vec{u}, \vec{u}')|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|} \quad \text{où} \quad \mathcal{P} = (R, \vec{u}, \vec{u}')$$



$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{AR}, \vec{u}, \vec{u}') = \underbrace{\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{u}')}_{0} + \mathrm{Det}(\overrightarrow{BR}, \vec{u}, \vec{u}')$$

car $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont coplanaires.

(car $\vec{AB}$ est C.L de $\vec{u}$ et $\vec{u'}$)

$$\Rightarrow \frac{|\mathrm{Det}(\vec{AR}, \vec{u}, \vec{u'})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u'}\|} = \frac{|\mathrm{Det}(\vec{BR}, \vec{u}, \vec{u'})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u'}\|}$$

donc $d(A,P) = d(B,P)$

□

On pose donc la définition suivante.

Définition :

- $\mathcal{D}$ une droite, $\mathcal{P}$ un plan.
- Si $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$, $d(\mathcal{D}, P) = 0$
- Si $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = 0$, $d(\mathcal{D},\mathcal{P}) = d(A,\mathcal{P})$ $\forall A \in \mathcal{D}$

De même :

Définition :

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans.
Si $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \neq \emptyset$, $d(P,P') = 0$
Si $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$, $d(\mathcal{P}, P') = d(A, P')$ $\forall A \in \mathcal{P}$ (i.e indépendante du point A choisi dans $\mathcal{P}$).

Proposition : PERPENDICULAIRE COMMUNE

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non parallèles. Alors il existe une unique droite Δ tq Δ orthogonale à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$ et $\Delta \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$, $\Delta \cap \mathcal{D}' \neq \emptyset$.

On dit que Δ est la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$

Remarque :

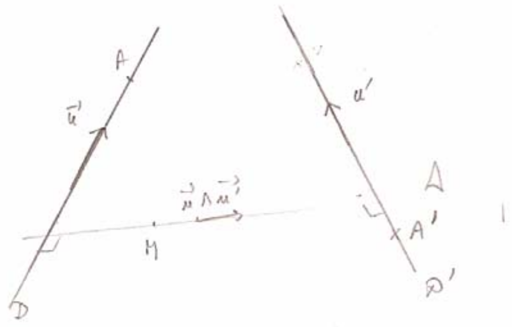
Perpendiculaire (intersection $\neq \emptyset$).

$\Downarrow$

orthogonale (intersection quelconque).

Preuve :

$\mathcal{D} = (A, \vec{u})$
$\mathcal{D}' = (A', \vec{u'})$



Existence :

$\mathcal{P} = (A, \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{u'})$ est bien un plan car $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ non colinéaires.

$(\mathcal{D} \not\parallel \mathcal{D}')$ donc $\vec{u} \wedge \vec{u'} \neq \vec{0}$.

$\mathcal{P}' = (A', \vec{u'}, \vec{u} \wedge \vec{u'})$ est un plan.

$\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}'$

Soit $\Delta = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

Alors Δ est une droite, car $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas parallèles (sinon : $\vec{u}$, $\vec{u'}$ et $\vec{u} \wedge \vec{u'}$ seraient coplanaires

donc $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{u'}, \vec{u} \wedge \vec{u'}) = 0$ donc $(\vec{u} \wedge \vec{u'}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u'}) = 0$

donc $\vec{u} \wedge \vec{u'} = \vec{0}$ $\lightning$ car $\mathcal{D} \not\parallel \mathcal{D}'$)

Brouillon prof :
$\vec{\Omega M} = \lambda \vec{u} \wedge \vec{u'}$
$\Omega = M - \lambda \vec{u} \wedge \vec{u'}$
$\Omega = A - \alpha \vec{u}$
$\lambda \vec{u} \wedge \vec{u'}$ Ω M
$\vec{w}$ A B
$B = A + \vec{w}$
i.e. $B = t_{\vec{w}}(A)$.

- $\vec{u} \wedge \vec{u'}$ dirige Δ.
- $\Delta \cap \mathcal{D}$?

Soit $M \in \Delta$ on cherche s'il existe $\Omega \in \mathcal{D} \cap \Delta$.

Analyse : Si Ω existe, alors :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{\Omega M} = \lambda \vec{u} \wedge \vec{u'}$.

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{\Omega A} = \alpha \vec{u}$.

Synthèse :

Soit Ω le point tel que :

$\Omega = A - \alpha \vec{u} = M - \lambda \vec{u} \wedge \vec{u'}$

α et λ sont bien définis car $\vec{MA}$ est dans le plan $\mathcal{P}$, donc C.L. de $\vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{u'}$ (base de $\mathcal{P}$)

donc $\vec{A\Omega} = -\alpha \vec{u}$ $\quad \Omega$ est bien défini.

Unicité :

Soit Δ_2 une perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

- Δ_2 est dirigée par $\vec{u} \wedge \vec{u'}$ car $\mathcal{D}_2 \perp \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_2 \perp \mathcal{D}'$

- Si $C = \Delta_2 \cap \mathcal{D}$

  alors $\vec{\Omega C}$ colinéaire à $\vec{u}$ car $\Omega \in \mathcal{D}$, $C \in \mathcal{D}$

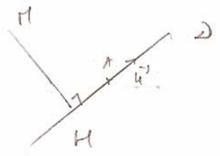
  donc $C = \Omega + \beta \vec{u}$

  donc $C \in \mathcal{P}$ $(\Omega \in \mathcal{P})$

  $$\left.\begin{array}{l} \text{donc } \Delta_2 \subset \mathcal{P} \\ \text{de m̂, } \Delta_2 \subset \mathcal{P}' \end{array}\right\} \Delta_2 \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \Delta \quad \text{donc } \Delta_2 = \Delta$$

$\square$ (ouf !!)

<u>Définition:</u>



$\mathcal{D}$ une droite, M un point.

$d(M, \mathcal{D}) = MH$ où H = projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

<u>Proposition:</u>

$\mathcal{D} = (A, \vec{u})$, M un point.

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\| \vec{AM} \wedge \vec{u} \|}{\| \vec{u} \|}$$

Preuve :

$$\vec{AM} \wedge \vec{u} = \underbrace{\vec{AH} \wedge \vec{u}}_{= \vec{0}} + \vec{HM} \wedge \vec{u}$$

car $\vec{AH}$ et $\vec{u}$ colinéaires.

$\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\| = \|\vec{HM} \wedge \vec{u}\| = HM \cdot \|\vec{u}\|$ car $|\sin(\vec{HM}, \vec{u})| = 1$

□

Position relative de deux droites dans l'espace.

$\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$
- $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ confondues $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \mathcal{D} = \mathcal{D}' \neq \emptyset$
- $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ (strictement)

$\mathcal{D} \nparallel \mathcal{D}'$
- $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \neq \emptyset$ $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires
- $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$ $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non coplanaire.

Définition :

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non $\parallel$

$d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = HH'$ où $H = \mathcal{D} \cap \Delta$ $H' = \mathcal{D}' \cap \Delta$ et

Δ est la perpendiculaire commune.

Proposition :

$\mathcal{D} = (A, \vec{u})$
$\mathcal{D}' = (A', \vec{u}')$ $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non $\parallel$.

Alors $$d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = \frac{|\mathrm{Det}(\vec{AA'}, \vec{u}, \vec{u}')|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}$$

Preuve :

On introduit H et H'

$\vec{AA'} = \vec{AH} + \vec{HH'} + \vec{H'A'}$

$$\text{Det}(\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u}\,') = \underbrace{\text{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{u}\,')}_{=0} + \text{Det}(\overrightarrow{MM'}, \vec{u}, \vec{u}\,') + \underbrace{\text{Det}(\overrightarrow{M'A'}, \vec{u}, \vec{u}\,')}_{=0}$$

$$|\text{Det}(\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u}\,')| = |\text{Det}(\overrightarrow{MM'}, \vec{u}, \vec{u}\,')| = |\overrightarrow{MM'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}\,')| = MM' \, \|\vec{u} \wedge \vec{u}\,'\|$$

car $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u} \wedge \vec{u}\,'$ colinéaires. □

Proposition :

Si $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ et $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$

$d(A, \mathcal{D}') = d(B, \mathcal{D}') \; \forall (A,B) \in \mathcal{D}^2$

on pose $d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = d(A, \mathcal{D}')$ où A est un point quelconque de $\mathcal{D}$.

Preuve :

Idem (utiliser prop ↑) □

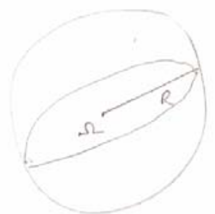
VII. Sphères

L'espace est rapporté à un rond $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition :

Soit Ω un point, R un réel > 0.

La sphère $S(\Omega, R)$ de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M tq $M\Omega = R$.



⚠ Sphère ≠ boule.

Proposition.

A, B, M 3 points $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

$\Leftrightarrow$ M appartient à la sphère de diamètre $[AB]$

Preuve :

I milieu de $[AB]$

$\vec{MA}\cdot\vec{MB} = (\vec{MI}+\vec{IA})\cdot(\vec{MI}+\vec{IB}) \quad \dots$

□

Remarque : $k \in \mathbb{R}$

$\{M, \vec{MA}\cdot\vec{MB} = k\}$ est soit une sphère, soit un point, soit vide

Δ … □

Proposition :

Dans un ronD.

1) $A\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$, $R>0$

$S(A,R)$ a pour EC.

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$

2) l'EC :

$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\lambda=0$ est celle :

- d'une sphère de centre $A\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et de rayon R si …
- du point $A\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ si …
- du vide si …

à finir

Exemple :

$x^2+y^2+z^2-x-1=0.$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=\frac{5}{4}$

$S\left(\Omega, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, $\Omega\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$

Intersection sphère droite.

Proposition :

Soit $S(\Omega, R)$ une sphère de centre Ω et de rayon R.

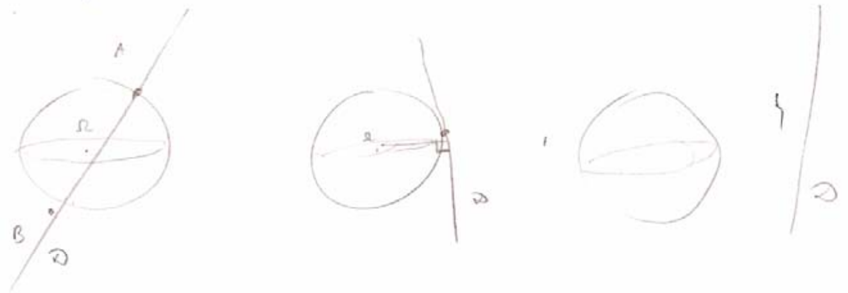
Soit $\mathcal{D}$ une droite.

Alors $S \cap \mathcal{D}$ est soit :

(*) • {2 points distincts}

(**) • {1 point}. Dans ce cas S et $\mathcal{D}$ sont dites tangentes.

(***) • $\emptyset$.



Si $d(\Omega, \mathcal{D}) < R \rightarrow$ (*)

Si $d(\Omega, \mathcal{D}) = R \rightarrow$ (**)

Si $d(\Omega, \mathcal{D}) > R \rightarrow$ (***)

Remarque :

Caractérisation de la tangente $d(\Omega, \mathcal{D}) = R$.

Preuve :

On choisit une RP de la droite et une EC de la sphère.

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \cap S \Leftrightarrow \begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2 \\ x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+\alpha t - x_0)^2 + (b + \beta t - y_0)^2 + (c + \gamma t - z_0)^2 = R^2 \\ x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t \end{cases}$$

$\rightarrow$ poly de degré 2 on résoud.

Intersection sphère plan :

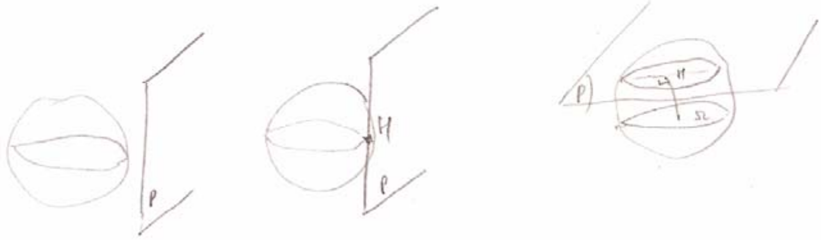
$S(\Omega, R)$ une sphère.

P un plan alors $S \cap P$: $\qquad d = d(\Omega, P)$

* $\emptyset$ si $d > R$

ou ** {un point H} où H est le projeté ⊥ de Ω sur P si $d = R$.

ou *** le cercle de centre H (où H ———) et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ si $d < R$.



Preuve :

On choisit un rond tq de ce rond, P ait pour EC : $z = 0$.

$S : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

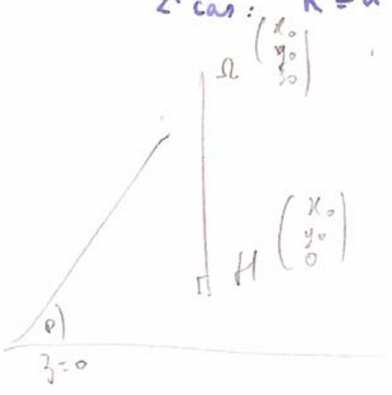
$\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

$S \cap P \begin{cases} z = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 - z_0^2 = R^2 - d^2 \end{cases}$

$d(\Omega, P) = |z_0|$

1er cas : $R < d \qquad S \cap P = \emptyset$

2e cas : $R = d \qquad S \cap P = \begin{cases} z = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0 \end{cases}$



$S \cap P = \left\{ H \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

3e cas : $R > d$

$S \cap P : \begin{cases} z = 0 \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \left(\sqrt{R^2-d^2}\right)^2 \end{cases}$.

donc $S \cap P$ est le cercle de centre $H \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

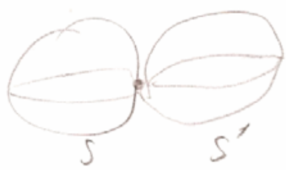
le projeté $\perp$ de Ω sur P, et rayon R $\sqrt{R^2-d^2}$ □

Remarque :

Intersection sphère / droite : on peut faire la même démo.

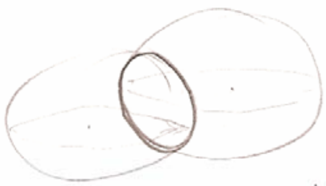
Intersection de 2 sphères non concentriques. S et S'

$S \cap S' = \emptyset$



$S \cap S' = \{$un point$\}$

on dit que S et S' sont tangents.



$S \cap S' = \{$un cercle$\}$

Preuve :

Partir de deux EC des sphères et se ramener à intersection sphère / plan. □

FIN !!