- Cours pour les absents -

Equations différentielles linéaires

RESULTAT (admis pour l'instant)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur un intervalle I.

alors $F : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad , \text{ où } x_0 \in I.$$

est 1) dérivable sur I
2) $F'(x) = f(x)$.

F est la primitive de f qui s'annule en x_0.

COROLLAIRE :
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur J.

DEFINITION : Intégrale d'une fonction à valeurs complexes.

$f : I \to \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$.

f continue $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ continues.

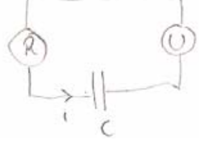
$$\int_a^b f \underset{def}{=} \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)$$

Notation :

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,dt$$

I. PROBLEMES MENANT A DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES.

1. Charge d'un condensateur à travers une résistance :



t temps $\quad i(t)$ l'intensité à l'instant
$u(t)$ la tension .....
$q(t)$ la charge de l'armature gauche du condensateur.

Loi d'ohm :

$u = Ri + \frac{q}{c}$

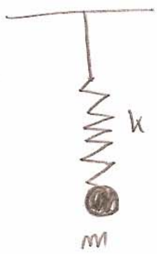
$i = \frac{dq}{dt}$ $\quad R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = u$

$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{u}{R}}$ ED 1er ordre.

Condition initiale : condensateur déchargé à $t = 0$.

$q(0) = 0$.

2. Ressort.



l_0 : longueur à vide

l : position à l'équilibre.

$x(t)$: l'élongation à l'instant t.

1ère loi dynamique :

$m x'' = -k(l + x - l_0) + mg$ et $mg = k(l - l_0)$

d'où $\boxed{m x'' + kx = 0}$ ED du 2nd ordre homogène

oscillateur harmonique.

Si frottement f :

$n'' + f x' + kx = 0$ oscillateur amorti.

Si force $F \neq 0$

$\boxed{m x'' + f x' + kx = F}$ non homogène.

3. Pendule :

$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$ ED non linéaire 2e ordre.

4. Voir poly :