- Cours pour les absents -

Equations différentielles linéaires (2)

II. Equations différentielles linéaires du 1er ordre.

Notations du § :
- I un intervalle ouvert contenant au moins deux points.
- $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- $a : I \to K$, $b : I \to K$ deux fonctions continues sur I

1. Solution d'une équation différentielle et structure de l'ensemble des solutions.

Définition :

(E) : $y' + ay = b$ i.e $y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t) \quad \forall t \in I$

puissance 1

est une équation différentielle linéaire du 1er ordre.

a) On dit que $f : I \to K$ est solution de (E) si 1) f est dérivable sur I 2) $f'(t) + a(t)f(t) = b(t) \quad \forall t \in I$

b) Résoudre (E) consiste à trouver toutes les solutions de (E).

c) Si $b = 0$, on dit que (E) est homogène (ou "sans second membre). et on note (H) : $y' + ay = 0$ l'équation différentielle homogène associée à (E)

Notation

S_E l'ensemble des solutions de (E)

S_H ——————— de (H)

Exemple :

$y' + 3y = 5$: EDL 1er ordre.

$y'' + 6y' + 5y = 0$ EDL 2nd ordre homogène.

$y' + y^3 = 0$ ED non linéaire, 1er ordre homogène.

(E) : $q'(t) = -\frac{1}{RC} q + \frac{U}{R}$ à résoudre (on suppose U = cste)

(H) : $q'(t) + \frac{1}{RC} q = 0 \quad K = \mathbb{R}$

Solutions de H :

$t \mapsto \lambda e^{-\frac{t}{RC}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ solution.

PROPOSITION

1) Si f et g sont solutions de (E), alors $f - g$ est solution de (H)

2) Si f est solution de (E) et h solution de (H), alors $f + h$ solution de (E)

Pour résoudre (E) i.e trouver toutes les solutions de (E), il suffit de trouver une solution particulière de (E) et de leur ajouter la solution générale (si toutes les solutions) de (H).

Preuve :

1) • $f-g$ est dérivable car f et g le sont.

• $f' + af = b$
$$\begin{array}{l} f' + af = b \\ g' + ag = b \\ \hline f' - g' + a(f-g) = 0 \end{array}$$
donc $(f-g)' + a(f-g) = 0$ donc $f-g \in S_H$

2) • $f+h$ dérivable.

• ...

□

PRINCIPE DE SUPERPOSITION.

> $y' + ay = b_1 + b_2$ avec b_1 (resp. b_2) continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
> Alors si y_1 est solution de (E_1) : $y' + ay = b_1$
> et si y_2 ——— (E_2) : $y' + ay = b_2$
> alors si $y_1 + y_2$ ——— (E) : $y' + ay = b_1 + b_2$

Remarque :
Surtout utile pour les solutions particulières.

Preuve :

• $y_1 + y_2$ dérivable

•
$$\begin{array}{l} y_1' + ay_1 = b_1 \\ + \ y_2' + ay_2 = b_2 \\ \hline (y_1+y_2)' + a(y_1+y_2) = b_1 + b_2 \end{array}$$

□

2. Résolution de l'équation différentielle homogène.

(H) : $y' + ay = 0$

PROPOSITION :

> Les solutions de (H) sont les fonctions de la forme :
> $$\begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto C \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a(x)\,dx} \end{array}$$
> où $t_0 \in I$ et $C \in \mathbb{K}$: constante.

Preuve :

Posons $\varphi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(x)\,dx}$ et soit g une fonction dérivable sur I.

Soit $f = g\varphi$.

• f est dérivable sur I, car φ est dérivable sur I (et $\varphi'(t) = a(t)\varphi(t)$) et g dérivable sur I

• $\forall t \in I$ $f'(t) = a(t) f(t) + g'(t)\varphi(t)$
$f'(t) = \varphi(t)\left[a(t) g(t) + g'(t)\right]$

$\forall t \in I \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow a(t)g(t) + g'(t) = 0$ car $\varphi(t) \neq 0 \ \forall t \in I$.

$f' = 0 \Leftrightarrow g$ est solution de $(H) \Leftrightarrow \exists C \in K : f = C$.

Donc : g solution de $(H) \Leftrightarrow \exists C \in K : \begin{cases} g(t) = Ce^{-\int_{t_0}^{t} a(x)\,dx} \\ \forall t \in I \end{cases}$

□

Remarque:

Si a est une fonction constante réelle, on retrouve le résultat de TS :

$y' + ay = 0 \Leftrightarrow y(t) = Ce^{-at}$.

Exemple:

(H) $2xy' = y$, $I = \mathbb{R}_+^*$

$2x\,y'(x) = y(x)$

$a(x) = -\frac{1}{2x}$ a continue sur I.

$\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}(\ln x - \ln x_0)$, $x_0 > 0$

Solution de (H) $x \mapsto Ce^{\frac{1}{2}(\ln x - \ln x_0)} = \tilde{C}\sqrt{x}$

$\sqrt{\frac{e^{\ln x}}{e^{\ln x_0}}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x_0}}$

Il suffit de connaître une primitive de a :

$\int_{cte}^{x} a(t)\,dt$ = une primitive de a $\quad a(x) = -\frac{1}{2}x$

$A(x) = -\frac{1}{2}\ln x \qquad x \mapsto Ce^{-A(x)}$ solution.

PROPOSITION :

1) Si f et g sont solutions de (H) alors $f+g$ est solution de (H)
2) Si $\alpha \in K$ alors αf est solution de (H).

Preuve : triviale □

Avec la proposition précédente, on dit que S_H est un K-espace vectoriel (sous espace vectoriel, voir plus tard).

Dans ce langage : la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-\int_{t_0}^{t} a(x)\,dx}$ est une base de S_H i.e toute solution de (H) est de la forme $C\varphi$, avec $C \in K$.

Parenthèse : $f : I \to K$ fonction

a) $f \neq 0 \not\Leftrightarrow f(x) \neq 0 \ \forall x \in I \qquad f \neq 0 \Leftrightarrow \exists x \in I \ f(x) \neq 0$

b) f ne s'annule pas $\Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) \neq 0$

Remarque :
Pour g une solution de (H), dire que $g \neq 0 \Leftrightarrow \forall x \in I, g(x) \neq 0$
i.e s'il existe $x_0 \in I$, $g(x_0) = 0$ alors $g = 0$ car exp ne s'annule pas.

3. Résolution de (E) : recherche d'une solution particulière.

1ère méthode : solution évidente.

2e méthode : méthode de variation de la constante.

(E) $y' + ay = b$.

Soit y_0 une solution de (H), $y_0 \neq 0$.

On pose $y(x) = C(x)\, y_0(x)$.

On cherche C, dérivable, telle que y soit solution de (E).

$C(x) = \dfrac{y(x)}{y_0(x)}$ et $y_0(x) \neq 0 \ \forall x \in I$ donc y dérivable $\Leftrightarrow$ C dérivable.

$y'(x) = C'(x)\, y_0(x) + C(x)\, y_0'(x)$

y solution de (E) $\Leftrightarrow C'(x)\, y_0(x) + \underbrace{C(x)\, y_0'(x) + a\, C(x)\, y_0(x)}_{= 0 \text{ car } y_0 \text{ solution de (H)}} = b(x)$

$\Leftrightarrow C'(x) = \dfrac{b(x)}{y_0(x)}$

C' continue sur I donc admet une primitive C sur I.

On vient de montrer l'existence d'une solution particulière de (E)

Exemple :

$q'(t) = -\frac{1}{RC}\, q(t) + \frac{U}{R} \quad t \in \mathbb{R} \quad U = \text{cte}$ à résoudre.

1) Solution particulière évidente : $t \mapsto UC$.

2) $S_H : t \mapsto \lambda e^{-\frac{t}{RC}}, \lambda \in \mathbb{R}$

3) La solution générale de (E) est donc : $t \mapsto UC + \lambda e^{-\frac{t}{RC}}$

Exemple :

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$

$2xy' = y + x^2 \sqrt{x}\, e^x$

$\Leftrightarrow y' - \frac{1}{2x} y = \dfrac{x\sqrt{x}\, e^x}{2} = b(x)$

$y(x) = C(x)\, y_0(x)$ avec $y_0(x) = \sqrt{x}$

$C'(x) = \dfrac{b(x)}{y_0(x)} = \dfrac{x e^x}{2}$ IPP

$C(x) = \frac{1}{2} \int x e^x dx = \frac{1}{2}\left(x e^x - \int e^x\right) = \frac{1}{2}(x-1)e^x + \text{cte}$

notation

On choisit cte $= 0$ pour avoir une solution particulière.

d'où $y_p(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}\,(x-1)\, e^x$: y_p solution particulière de (E)

La solution générale de (E) est : $\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{x}(x-1)e^x + C\sqrt{x} \end{array} \quad C \in \mathbb{R}$.

THEOREME DE CAUCHY

$(E) : \begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ où $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ admet une unique solution.

Preuve :

- Existence :
d'après la méthode de variation de la constante, et connaissant la solution générale de (H), on sait qu'il existe une infinité de solution pour (E) : $y' + ay = b$.
- Unicité :
Soit $y(x) = y_p(x) + C \cdot \varphi(x)$ où y_p est une solution particulière de (E),
$\varphi(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right)$ $C \in K$, C est uniquement déterminé par :

$$\left.\underbrace{y(x_0)}_{y_0} = y_p(x_0) + C\underbrace{\varphi(x_0)}_{1}\right\} \Rightarrow C = y_0 - y_p(x_0)$$ □

Exemple $\begin{cases} q'(t) = -\frac{1}{RC}\, q(t) + \frac{U}{R} \\ q(0) = 0 \end{cases}$ admet pour unique solution : $t \mapsto UC - UCe^{-\frac{t}{RC}}$

$t \mapsto UC(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$