- Cours pour les absents -

Equations différentielles linéaires (3)

Exemple : (Suite du théorème de Cauchy)

$$\begin{cases} 2xy' = y + x^2\sqrt{x}\, e^x \\ y(3) = 0 \end{cases}$$

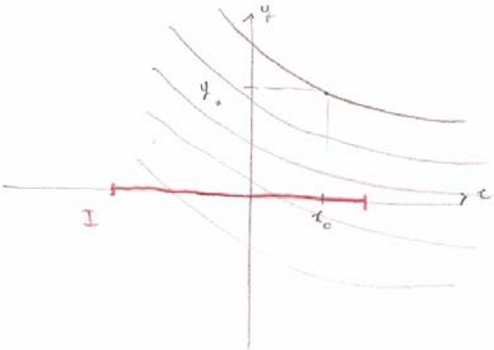
La solution générale de (E) est :

$x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{x}\,(x-1)\,e^x + c\sqrt{x}$ où $c \in \mathbb{R}$.

en remplaçant x par 3 on trouve $c = -e^3$

INTERPRETATION GRAPHIQUE DU PROBLEME DE CAUCHY.

On appelle courbe intégrale d'une EDL (E) $y' + ay = b$ la courbe représentative d'une solution de (E).
Le théorème de Cauchy affirme donc que $\forall (x_0, y_0)$ tq $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$ il passe une unique courbe intégrale.



Les courbes intégrales ne s'intersectent pas.

Rappel :
Equation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ ($y = f(x)$) en x_0.
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
$\uparrow$ pente
Vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$

Si y est solution de l'équation (E) alors le vecteur $(1, y'(x_0))$ est un vecteur de la tangente à la courbe de y en x_0. i.e. $\vec{u}\,(1, -a(x_0)\,y(x_0) + b(x_0))$

On trace ainsi un "champ" de vecteurs tangents $(y' = -ay + b)$
aux courbes intégrales, ce qui donne l'allure de celles-ci.

PROPOSITION :

La fonction $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\alpha x} \end{array}$, où $\alpha \in \mathbb{C}$, est la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = \alpha y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Preuve :
On résoud et on trouve $y(x) = Ce^{\alpha x}$, $C \in \mathbb{C}$ et $y(0) = C$ d'où $C = 1$.
On conclut par l'unicité du problème de Cauchy. $\square$

APPLICATION :

On veut résoudre l'équation fonctionnelle suivante :

$f(t+u) = f(t)\,f(u) \quad \forall (t,u) \in \mathbb{R}^2$ d'inconnue la fonction f supposée définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

PROPOSITION :

Les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ tq $\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2,\ f(t+u) = f(t)f(u)$.

sont :
- la fonction nulle.
- les fonctions $x \mapsto e^{\alpha x}$, où $\alpha \in \mathbb{C}$.

Preuve : 1ère étape : il est clair que ces fonctions sont solutions.

2e étape : on montre qu'il n'y en a pas d'autres.

Soit f une solution de $(\mathcal{E}_f)$ $f(t+u) = f(t)\,f(u)$.

Donc, en dérivant par rapport à t (à u fixé).

- $f'(t+u) = f(u)\,f'(t) \quad \forall (t,u) \in \mathbb{R}^2$
- pour $t = u = 0$ dans $(\mathcal{E}_f)$ il vient $f(0) = f(0)^2$

donc $f(0) = 1$ ou $f(0) = 0$.

En prenant $t = 0$ dans (1) il vient

$f'(u) = f'(0)\,f(u)$ on pose $\alpha = f'(0)$.

1er cas : $f(0) = 1$ f est solution de l'équation différentielle $y' = \alpha y$

la proposition dit que $f = x \mapsto e^{\alpha x}$.

2e cas : $f(0) = 0$

dans $\mathcal{E}_f$ on pose $t = 0$, $u \in \mathbb{R}$, alors $f(u) = f(0)\cdot f(u)$

$f(u) = 0$ i.e $f = 0$ $\square$

Exercices : problèmes de raccord.

(E) : $xy' - 2y = x^3$ à résoudre.

1) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$
2) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_-^*$
3) Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

Résolution

1) Sur $\mathbb{R}_+^*$

$(E) \iff y' - \frac{2}{x} y = x^2$

$(H) : \ y' - \frac{2}{x} y = 0.$

$y(x) = Cx^2$, où $C \in \mathbb{R}$

(E) : Solution particulière :

On pose : $y(x) = C(x) \cdot x^2$, avec C dérivable.

Alors : $C'(x) = \frac{x^2}{x^2} = 1$ $C(x) = x$

$y(x) = x^3$ est solution particulière.

. La solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto x^3 + Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$

2) Sur $\mathbb{R}_-^*$

$x \mapsto x^3 + Dx^2$, $D \in \mathbb{R}$.

3) Etude sur $\mathbb{R}$.

Analyse :

Si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors :

a) y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ donc :

$$y(x) = \begin{cases} x^3 + Cx^2, & x > 0, \ C \in \mathbb{R} \\ x^3 + Dx^2, & x < 0, \ D \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

b) y est continue en 0.

Alors $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} y(x)$

$0 = 0$ On prolonge par continuité y en 0 en posant $y(0) = 0$

c) y est dérivable sur $\mathbb{R}$, et en particulier en 0.

donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim \frac{y(x) - y(0)}{x - 0}$

$= \lim\limits_{0^+} (x^2 + Cx) = \lim\limits_{0^-} (x^2 + Dx)$

$= 0$

Synthèse :

Les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \begin{cases} Cx^2 + x^3 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ Dx^2 + x^3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^*$ et en 0 : car $0y'(0) - 2y(0) = 0$

Conclusion :

- Il y a une infinité de solutions bien que $y(0) = 0$.
  - $\to$ pas de problème de Cauchy.
- Résoudre : $\begin{cases} xy' - 2y = x^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

  Sur $\mathbb{R}$ n'a pas de solutions

Exercice :

Sur $\mathbb{R}$

$x(x-1)y' + (2x-1)y = 1$.