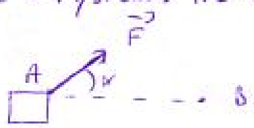
ASPECT ENERGETIQUE DES SYSTEMES MECANIQUES

I – Travail d'une force

→ Le travail est le transfert d'énergie entre 2 systèmes lié à une force dont le point d'application se déplace.

* $\boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{AB} = F \times AB \times \cos(\vec{F};\vec{AB})}$



↳ moteur si $W_{A\to B}(\vec{F}) > 0$, résistant si $W_{A\to B}(\vec{F}) < 0$

* $\boxed{W_{A\to B}(\vec{P}) = m\cdot g\,(z_A - z_B)}$

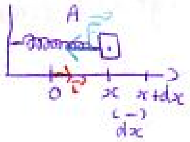
* Si $\vec{F}$ n'est pas constante sur AB, on suppose qu'elle l'est sur un trajet élémentaire $\vec{d\ell}$. La force δW s'exprime :

$$\boxed{\delta W = \vec{F}\cdot\vec{d\ell}}$$

On a alors $W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{d\ell}$

EXEMPLE DU RESSORT :

* Travail élémentaire



$\vec{F} = -k \times x \times \vec{i}$

→ $\delta W = \vec{F'}\cdot\vec{d\ell}$

avec F' : force pour étirer

→ $\vec{d\ell} = dx\cdot\vec{i}$

→ $\vec{F'} = kx\,\vec{i}$ ⇒ $\boxed{\delta W = kx\,dx}$ car $\vec{i}\cdot\vec{i} = 1$

* Travail de x_1 à x_2 : $W_{1\to 2}(\vec{F'}) = \int_{x_1}^{x_2} \delta W = \int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx = k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$

On peut aussi tracer F' en fonction de kx et calculer les aires sous la courbe.

II – Energie potentielle

→ Energie qu'un système possède du fait de son interac° avec un autre système.

* de pesanteur : $\Delta_{A\to B} E_{pp} = W_{A\to B}(\vec{F}) = -W_{A\to B}(\vec{P})$ car on monte le système, s'opposant au poids, pr lui faire gagner de la potentialité à tomber.

$= -mg(z_A - z_B) = mgz_B - mgz_A$ Or $\Delta_{A\to B} E_{pp} = E_{pp_B} - E_{pp_A} = mgz_B - mgz_A$

d'où $\boxed{E_{pp} = mgz}$

* Elastique : $\Delta E_{pe} = W_{1\to 2}(\vec{F}) = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$ Or $\Delta E_{pe} = E_{pe_2} - E_{pe_1} = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$

d'où $\boxed{E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2}$

III – Etude énergétique du système solide-ressort

On a vu $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ avec pour équation solution $x(t) = X_m\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\cdot t + \varphi\right)$

↳ $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$E_p = E_{pp} + E_{pe} = E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\cdot X_m^2\cdot\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}\cdot t + \varphi\right)$

$E_c = \frac{1}{2}mV_x^2 = \frac{1}{2}m\cdot\dot{x}^2$ or $\dot{x}(t) = -X_m\cdot\frac{2\pi}{T_0}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\cdot t + \varphi\right)$

d'où $E_c = \frac{1}{2}m\cdot X_m^2\cdot\frac{4\pi^2}{T_0^2}\cdot\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}\cdot t + \varphi\right) = \frac{1}{2}m\cdot X_m^2\cdot\frac{k}{m}\cdot\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}\cdot t + \varphi\right)$

$\boxed{= \frac{1}{2}\cdot X_m^2\cdot k\cdot\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}\cdot t + \varphi\right)}$

$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}X_m^2\cdot k\cdot\sin^2(\_) + \frac{1}{2}kX_m^2\cdot\cos^2(\_)$

$= \frac{1}{2}kX_m^2\,[\sin^2(\_) + \cos^2(\_)]$ $\boxed{= \frac{1}{2}kX_m^2}$ → indépendante du temps

→ $x(0) = X_m\cdot\cos(\varphi) = X_0$

→ $\dot{x}(0) = -X_m\cdot\frac{2\pi}{T_0}\cdot\sin(\varphi) = 0$ donc $\sin(\varphi) = 0 \iff \begin{cases}\varphi = 0\\ \varphi = \pi\end{cases}$ Or $X_0 > 0$ et $X_m > 0$ donc $\cos\varphi > 0 \Rightarrow \varphi = 0$ et $X_m = X_0$

⇒ $E_{m_0} = E_{c_0} + E_{p_0} = \frac{1}{2}kX_0^2$ (énergie initiale avec $E_{c_0} = 0$ car $v(0) = 0$)

énergie à la position d'équilibre ⇒ $E_{m_0} = E_{m_E} \iff E_{c_0} + E_{p_0} = E_{m_E}$ (Or $E_{p_0} = 0$ car $x_E = 0$)

$\iff E_{m_E} = E_{c_E} = \frac{1}{2}mV_E^2$ Or $E_{m_0} = E_{m_E} \iff \frac{1}{2}kX_0^2 = \frac{1}{2}mV_E^2$

⇒ $\boxed{V_E = X_0\sqrt{\frac{k}{m}}}$