



Exercice de thermodynamique

Calcul d'entropie – piston adiabatique

ENONCE

Un piston, muni d'une vanne, sépare en deux compartiments un récipient adiabatique. A l'état initial, le piston est complètement à gauche, la vanne est fermée et le premier compartiment contient deux moles de gaz parfait à T_0 , $2p_0$. La pression extérieure vaut p_0 . On ouvre la vanne.

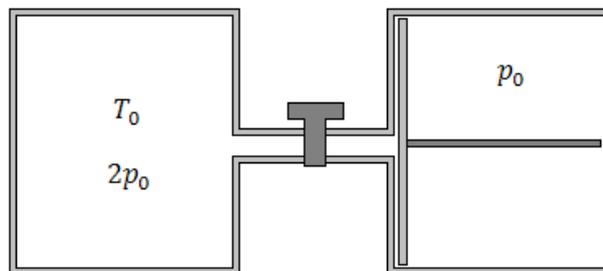


FIGURE 1

QUESTION 1 Déterminer l'état final du gaz.

QUESTION 2 Calculer la variation d'entropie du gaz.

QUESTION 3 Que valent l'entropie créée S_{cr} et l'entropie échangée $S_{éch}$?

Pour les applications numériques, on prendra :

$$T_0 = 300 \text{ K} \quad R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \quad \gamma = \frac{5}{3}$$

Solution

QUESTION 1

Soit V_0 le volume initial du gaz et V_f sont volume final. Les états extrêmes de la transformation :

$$(2p_0, V_0, T_0) \rightarrow (p_0, V_f, T_f)$$

sont des états d'équilibre, qui suivent l'équation d'état :

$$2p_0V_0 = 2RT_0$$

et

$$p_0V_f = 2RT_f$$

Ce faisant, la pression extérieure (p_0) exerce un travail :

$$-p_e\Delta V = -p_0(V_f - V_0) = p_0V_0 - p_0V_f = R(T_0 - 2T_f)$$

Or, la première loi de JOULE indique que l'énergie interne du gaz ne dépend que de sa température, de sorte que :

$$\Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_f - T_0) = \frac{2R}{\gamma - 1}(T_f - T_0)$$

tandis que le premier principe de la thermodynamique impose :

$$\Delta U = W + Q = W$$

d'où

$$\frac{2R}{\gamma - 1}(T_f - T_0) = R(T_0 - 2T_f)$$

$$2T_f - 2T_0 = (\gamma - 1)T_0 - (2\gamma - 2)T_f$$

$$2\gamma T_f = (\gamma + 1)T_0$$

d'où :

$$\boxed{T_f = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} T_0}$$

Aussi, les équations d'états $\begin{cases} p_0V_f = 2RT_f \\ 2p_0V_0 = 2RT_0 \end{cases}$ deviennent :

$$\frac{V_f}{2V_0} = \frac{T_f}{T_0}$$

soit :

$$\boxed{V_f = \frac{\gamma + 1}{\gamma} V_0}$$

Application numérique :

$$T_f = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} \cdot 300$$

d'où :

$$\boxed{T_f = 240 \text{ K}}$$

QUESTION 2

L'entropie d'un gaz parfait peut être présentée comme une fonction de T et P :

$$S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln(T^\gamma p^{1-\gamma}) + cte = \frac{2R}{\gamma - 1} \ln(T^\gamma p^{1-\gamma}) + cte$$

de sorte que la variation d'entropie du gaz vaut :

$$\begin{aligned} \Delta S &= S_f - S_0 \\ &= \frac{2R}{\gamma - 1} \ln \left[\left(\frac{T_f}{T_0} \right)^\gamma \cdot \left(\frac{p_0}{2p_0} \right)^{1-\gamma} \right] \\ &= \frac{2R}{\gamma - 1} \ln \left[\left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right)^\gamma \cdot 2^{\gamma-1} \right] \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\Delta S = \frac{2R}{\gamma - 1} \left[\gamma \ln \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right) + (\gamma - 1) \ln 2 \right]}$$

Application numérique :

$$\Delta S = \frac{2 \cdot 8,314}{\frac{2}{3}} \cdot \left[\frac{5}{3} \cdot \ln \left(\frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} \right) + \frac{2}{3} \ln 2 \right]$$

soit :

$$\boxed{\Delta S = 2,25 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}}$$

QUESTION 3

Le récipient étant adiabatique, la chaleur δQ que le gaz reçoit est nulle, ce qui signifie que l'entropie échangée vaut :

$$S_{\text{éch}} = \int \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Aussi, le bilan d'entropie conduit à :

$$\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{cr}}$$

D'où :

$$S_{\text{cr}} = \Delta S = 2,25 \text{ J. K}^{-1}$$

