# Calcul des centres de masse

## 1 Additivité

PROPRIETE *1*.1 Additivité

On peut remarquer que la définition du centre de masse permet d'écrire que si le système $S$ considéré peut être décomposé en plusieurs parties $S_1$ et $S_2$ simples (c'est-à-dire dont les centres de masse $G_1$ et $G_2$ sont simples à déterminer) alors le centre de masse $G$ de $S$ est tel que :

$$\int_{A\in S} \overrightarrow{OA}\mathrm{dm} = \int_{A\in S_1} \overrightarrow{OA}\mathrm{dm} + \int_{A\in S_2} \overrightarrow{OA}\mathrm{dm}$$

$$= M_1\,\overrightarrow{OG_1} + M_2\,\overrightarrow{OG_2}$$

$$= M\,\overrightarrow{OG}$$

## 2 Symétriques

DEFINITION *2*.1 Symétrie d'un système

On dira qu'un système $S$ possède une symétrie matérielle par rapport à un point, une droite ou un plan si pour tout point $A$ du système, il existe un point $B$ symétrique de $A$ (par rapport au point, à la droite ou au plan) tel que :

- $B$ appartient à $S$,
- $\rho(A) = \rho(B)$ avec $\rho$ la masse volumique locale.

THEOREME *2*.2

Si un système possède un élément de symétrique, alors son centre de masse appartient nécessaire à cet élément de symétrie.

DEMONSTRATION 2.3

La démonstration est évidente par utilisation de deux petits éléments de matière symétrique dont le centre de masse est situé sur l'élément de symétrie et par le fait que la somme de deux vecteurs parallèles à une même droite (ou plan) est une vecteur parallèle à cette droite (plan).

# 3 Théorèmes de GULDIN

INTRODUCTION HISTORIQUE 3.1

GULDIN (1577, 1643) est un scientifique (père jésuite) suisse à qui on attribue ces théorèmes également attribués à Pappus d'Alexandrie (300, ?) lequel a surtout commenté les découvertes de ses prédécesseurs.

THEOREME 3.2 Théorème de GULDIN

Soit une plaque plane, homogène, d'épaisseur négligeable. Soit $G$ son centre de masse et $\Delta$ une droite située dans le plan de la plaque mais n'appartenant pas au solide.

On a :

$$\boxed{\boldsymbol{2\pi S\, HG = V}}$$

Le point $H$ est la projection orthogonale de $G$ sur $\Delta$, $S$ est la surface de la plaque et $V$ le volume engendré par $S$ en rotation autour de l'axe $\Delta$.

DEMONSTRATION 3.3 Théorème de GULDIN

Soit $G$ le centre de masse de $P$ la plaque.

$$S\,\overrightarrow{OG} = \int_{plaque} \overrightarrow{OM}\mathrm{d}S$$

Par projection sur un axe perpendiculaire à $\Delta$, on obtient :

$$Sr_G = \int_{plaque} r\mathrm{d}S$$

Ce qui donne par multiplication par $2\pi$ :

$$2\pi Sr_G = \int_{plaque} 2\pi r\mathrm{d}S$$

Le second membre représente le volume $V$ engendré par la rotation de la plaque autour de l'axe $\Delta$.

APPLICATION 3.4 Recherche du centre de masse d'un demi-disque

Soit un demi-disque dont on cherche le centre de masse.

On utilise le fait que le centre de masse appartient à un axe de symétrie.
On utilise le théorème de GULDIN et on obtient :

$$2\pi.\frac{\pi R^2}{2}.r_G = \frac{4}{3}\pi R^3$$

soit :

$$r_G = \frac{4R}{3\pi}$$

THEOREME 3.5 Théorème de GULDIN

Soit une courbe contenue dans un plan. Soit $G$ son centre de masse et $\Delta$ une droite située dans le plan de la courbe mais ne coupant pas la courbe.

On a :

$$\boxed{\boldsymbol{2\pi L\, HG = S}}$$

Le point $H$ est la projection orthogonale de $G$ sur $\Delta$, $L$ est la longueur de la courbe et $S$ la surface engendrée par la courbe en rotation autour de l'axe $\Delta$.

APPLICATION 3.6 Surface d'un tore engendré par un cercle en rotation

Soit un cercle de rayon $r$ (courbe) qui par rotation autour d'un axe $(HG = R)$ engendre un tore dont on cherche la surface.

On utilise le théorème de GULDIN et on obtient :

$$2\pi.2\pi r.R = S$$

soit

$$S = 4\pi^2 Rr$$

❖ ❖ ❖