



Champ de gravitation

Analogies avec le champ électrostatique

On considère une coquille cylindrique infinie de rayon externe R_1 et de rayon interne R_2 . La coquille a une masse volumique constante entre les cylindres de rayons R_1 et R_2 . L'origine des potentiels gravitationnels est prise sur le cylindre extérieur de rayon R_2 . La masse volumique de la coquille est notée μ .

L'étude de cet exemple se base entièrement sur l'analogie entre la force d'interaction gravitationnelle et la force d'interaction de COULOMB.

Rappelons-les avant de poursuivre :

- Expression de la *force d'interaction gravitationnelle* exercée par une masse m_1 sur une masse m_2 (le vecteur \vec{u}_r est dirigé de la masse 1 vers la masse 2, r est la distance séparant les deux masses) :

$$\vec{F}_{\text{gravitationnelle},1 \rightarrow 2} = -\vec{u}_r G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

- Expression de la *force d'interaction de COULOMB* exercée par une charge q_1 sur une charge q_2 (le vecteur \vec{u}_r est dirigé de la charge 1 vers la charge 2, r est la distance séparant les deux charges) :

$$\vec{F}_{\text{électrostatique},1 \rightarrow 2} = \vec{u}_r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Plaçons-nous en coordonnées cylindriques. L'axe (Oz) est choisi comme étant l'axe du cylindre.

Comme en électrostatique, les symétries donnent la direction du champ (celui-ci est contenu dans les plans de symétrie de la distribution de masse ou de charge). Les invariances par translation donnent la dépendance des variables.

Ici, la distribution de masses est symétrique selon les plans contenant l'axe (Oz) et selon les plans orthogonaux à (Oz). On en déduit que le champ gravitationnel est contenu dans l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire qu'il est radial.

De plus, le champ est invariant par translation selon (Oz) et invariant par rotation autour de (Oz) selon θ .

On en déduit que le champ de gravitation s'écrit :

$$\vec{G} = G_r(r)\vec{u}_r$$

En électrostatique, on a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$, où \vec{E} est le champ électrostatique et V le potentiel électrostatique.

On aura donc de même :

$$\boxed{\vec{G} = -\overrightarrow{\text{grad}V}}$$

Où V est le potentiel gravitationnel.

Or, comme $\vec{G} = G_r(r)\vec{u}_r$, \vec{G} est porté par \vec{u}_r et donc il en est de même pour le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}V}$.

En coordonnées cylindriques, le gradient s'exprime par :

$$\overrightarrow{\text{grad}V} = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$

On en déduit que $\overrightarrow{\text{grad}V} = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r$, puis $G_r(r)\vec{u}_r = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r$ et enfin, puisque $V = V(r)$:

$$G_r(r)\vec{u}_r = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$$

D'où :

$$G_r(r) = -\frac{dV}{dr}$$

On va utiliser le théorème de GAUSS. Rappelons-le en électrostatique pour établir son pendant gravitationnel, dans le but de trouver \vec{G} puis V .

En électrostatique :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Pour le théorème de GAUSS gravitationnel, on remplacera évidemment Q_{int} par M_{int} . Trouvons l'équivalent de ϵ_0 .

On a $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow -G$ d'après l'expression des forces d'interaction gravitationnelle et électrostatique d'où :

$$\varepsilon_0 \leftrightarrow \frac{1}{-4\pi G}$$

On en déduit le théorème de GAUSS pour le champ gravitationnel :

$$\oiint_S \vec{G} \cdot \vec{n} dS = -4\pi G M_{\text{int}}$$

Il est important d'appliquer le théorème de GAUSS sur une surface fermée. Dans le cas présent, on considérera donc une section du cylindre de longueur l fixée. En effet, si on considérait l'intégralité du cylindre, la surface serait infinie et donc on aurait une masse infinie ce qui n'est pas physiquement possible.

On travaillera désormais sur la masse linéique λ de la coquille et non plus sur sa masse volumique.

λ est définie par :

$$\lambda = \frac{m}{l}$$

Puis avec $m = \mu V = \mu l(\pi R_1^2 - \pi R_2^2) = \mu l \pi (R_1^2 - R_2^2)$, on en déduit :

$$\lambda = \mu \pi (R_1^2 - R_2^2)$$

La symétrie cylindrique du problème nous suggère de considérer un cylindre pour appliquer le théorème de GAUSS.

On donnera le champ gravitationnel à l'extérieur de la coquille, dans son épaisseur et à l'intérieur.

La distinction se fait donc au niveau du domaine de rayon :

- à l'extérieur de la coquille, le rayon est $r \geq R_1$,
- dans l'épaisseur de la coquille, le rayon est $R_1 \geq r \geq R_2$,
- à l'intérieur de la coquille, le rayon est $R_2 \geq r$.

On peut ici considérer des inégalités larges. En effet, le champ gravitationnel comme le champ électrostatique est continu dans une distribution volumique de masses ou de charges. C'est à la traversée d'une surface massique ou chargée qu'il y a discontinuité.

