# Limites de suites et de fonctions

## I – Limite d'une suite

### 1) Rappels

Pour une suite numérique $(u_n)$, il y a quatre possibilités :

- Soit **la suite $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$**, ce qui signifie que tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang $n_0$. On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ .
- Soit **la suite $(u_n)$ admet pour limite $+\infty$**, ce qui signifie que tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang $n_0$. On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Soit **la suite $(u_n)$ admet pour limite $-\infty$**, ce qui signifie que tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang $n_0$. On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- Soit **la suite $(u_n)$ n'admet pas de limite.**

Si une suite ne converge pas vers un réel alors on dit qu'elle **diverge**.

### 2) Suites de référence

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$ …
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ …
- Si $-1 < a < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ $\qquad$ Si $a > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$

  Si $a = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1$ $\qquad$ Si $a \leq -1$, alors $(u_n)$ n'admet pas de limite.

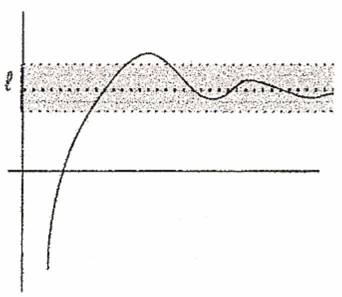
## II – Limite d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$

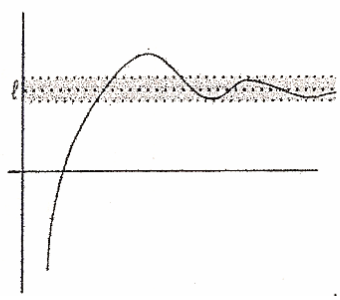
### 1) Limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$

**Définitions :**

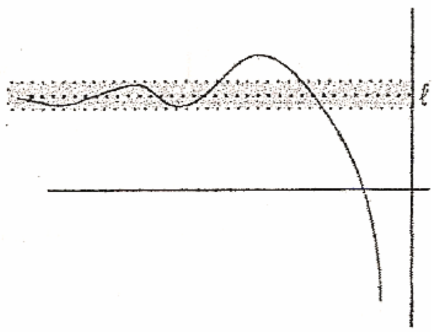
Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- Dire que $f$ a pour limite $\ell$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que $x$ est assez grand. On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ .



- Dire que $f$ a pour limite $\ell$ en $-\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que $x$ est négatif et assez grand en valeur absolue. On écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

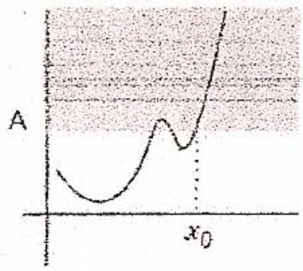



Dans ces cas, on dit que la droite d'équation $\boxed{y = \ell}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.

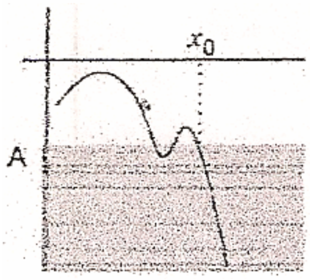
## 2) Limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$

**Définitions :**

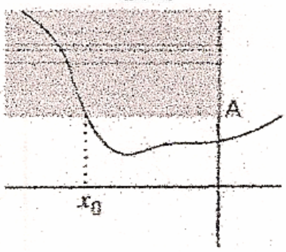
- Dire que $f$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que $x$ est assez grand. On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



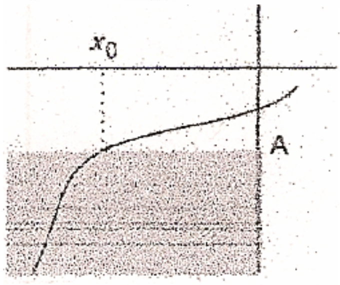

- Dire que $f$ a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que $x$ est assez grand. On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.




- Dire que $f$ a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que $x$ est négatif et assez grand en valeur absolue. On écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.



- Dire que $f$ a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que $x$ est négatif et assez grand en valeur absolue.
  On écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

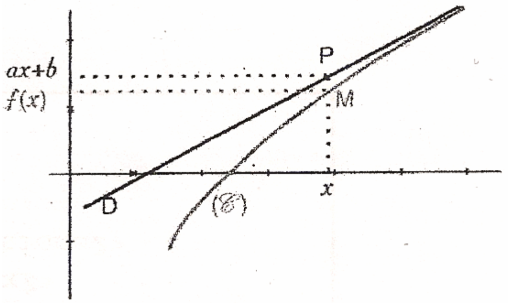



### 3) Asymptote oblique

**Définition :**

Soit $a$ et $b$ deux réels.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$, on dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$, on dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $-\infty$.




## III – Limite d'une fonction en un réel *a*

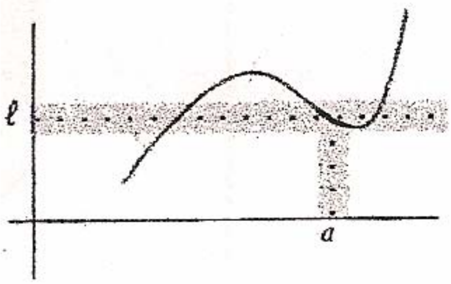
### 1) Limite finie en *a*

**Définition :**

Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Dire que $f$ a pour limite $\ell$ quand $x$ tend vers $a$, signifie que tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que $x$ est assez proche de $a$.

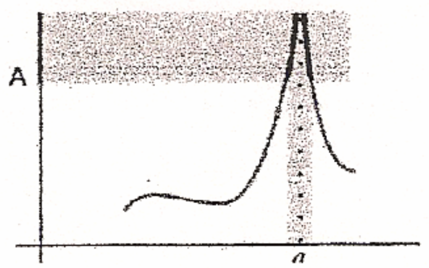
On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.



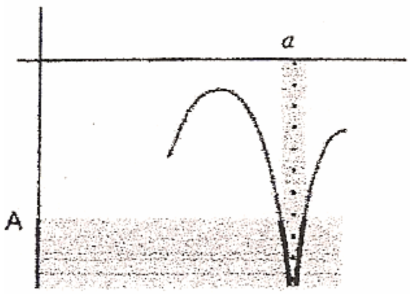
### 2) Limite infinie en *a*

**Définitions :**

- Dire que $f$ a pour limite $+\infty$ quand $x$ tend vers $a$, signifie que tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que $x$ est assez proche de $a$.
  On écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.




- Dire que $f$ a pour limite $-\infty$ quand $x$ tend vers $a$, signifie que tout intervalle de la forme $]-\infty,A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que $x$ est assez proche de $a$.
  On écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.




Dans ces cas, on dit que la droite d'équation $\boxed{x=a}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

**Remarque :**

Lorsqu'on considère uniquement les réels $x$ de $\mathscr{D}_f$ strictement supérieurs à $a$, on parle de limite à droite en $a$ ou de limite en $a$ par valeurs supérieures. On note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Lorsqu'on considère uniquement les réels $x$ de $\mathscr{D}_f$ strictement inférieurs à $a$, on parle de limite à gauche en $a$ ou de limite en $a$ par valeurs inférieures. On note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

## IV – Opérations sur les limites

Les tableaux suivants permettent de donner, dans certains cas, la limite de la somme, du produit, du quotient de deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ou de deux fonctions $f$ et $g$, lorsqu'on connaît la limite des deux suites ou la limite des deux fonctions.
La plupart des résultats se comprennent de façon intuitive. Ils sont admis mais peuvent tous être démontrés en utilisant les définitions données précédemment.
$l$ et $l'$ désignent des nombres réels.
Dans le cas de deux fonctions, les limites peuvent être des limites en $+\infty$, en $-\infty$, en $a$ ($a \in \mathbb{R}$), des limites à droite ou à gauche.

## 1) Limite d'une somme

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $(u_n)$ ou $f$ a pour limite | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| Si $(v_n)$ ou $g$ a pour limite | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| Alors $(u_n+v_n)$ ou $f+g$ a pour limite | $\ell+\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | FI |

## 2) Limite d'un produit

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Si $(u_n)$ ou $f$ a pour limite | $\ell$ | $\ell \neq 0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $0$ |
| Si $(v_n)$ ou $g$ a pour limite | $\ell'$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| Alors $(u_n \times v_n)$ ou $f \times g$ a pour limite | $\ell.\ell'$ | $+\infty$ ou $-\infty$ Règle des signes | $+\infty$ ou $-\infty$ Règle des signes | FI |

## 3) Limite d'un inverse

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Si $(u_n)$ ou f a pour limite | $\ell' \neq 0$ | $0^+$ c'est-à-dire 0 par valeurs supérieures | $0^-$ c'est-à-dire 0 par valeurs inférieures | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| Alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ ou $\frac{1}{f}$ a pour limite | $\frac{1}{\ell'}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |

## 4) Limite d'un quotient

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $(u_n)$ ou $f$ a pour limite | $\ell$ | $\ell$ | $\ell \neq 0$ | $0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| Si $(v_n)$ ou $g$ a pour limite | $\ell' \neq 0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $0^+$ ou $0^-$ | $0$ | $0^+$ ou $0^-$ | $\ell' \neq 0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| Alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ ou $\frac{f}{g}$ a pour limite | $\frac{\ell}{\ell'}$ | $0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ Règle des signes | FI | $+\infty$ ou $-\infty$ Règle des signes | $+\infty$ ou $-\infty$ Règle des signes | FI |

## 5) Formes indéterminées

Il y a **quatre formes indéterminées** qui sont « $+\infty-\infty$ », « $0\times\infty$ », « $\frac{0}{0}$ » et « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

## 6) Propriété

**Propriété :**

- La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction rationnelle (c'est-à-dire d'un quotient de deux polynômes) est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

**Remarque :**
Ce résultat peut se démontrer par factorisation des termes de plus haut degré (termes dominants).
Attention, il est valable uniquement pour une limite en $+\infty$ ou en $-\infty$. Il peut aussi être utilisé pour des suites.

## V – Limite et ordre

**Propriété : Preuve 1**

- Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites numériques qui convergent respectivement vers $l$ et $l'$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
  Si pour tout $n \geq n_0$ , $u_n \leq v_n$ alors $l \leq l'$.
- Soit deux fonctions $f$ et $g$ définies sur un intervalle $]a,+\infty[$ telles que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l'$
  Si pour tout $x \in ]a,+\infty[$, $f(x)\leq g(x)$ alors $l \leq l'$.

**Remarque :**
Pour des fonctions la propriété peut s'étendre à des limites quand $x$ tend vers $-\infty$, ou vers un réel $x_0$, ou pour des limites à droite ou à gauche (il suffit de modifier l'intervalle de définition).
Voici par exemple l'énoncé correspondant quand $x$ tend vers $-\infty$ :
Soit deux fonctions $f$ et $g$ définies sur un intervalle $]-\infty,a[$ telles que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=l'$.
Si pour tout $x \in ]-\infty,a[$, $f(x)\leq g(x)$ alors $l \leq l'$.

**Propriété :**

- Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites numériques et soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
  Si pour tout $n \geq n_0$ , $u_n \geq v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ , alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
- Soit deux fonctions $f$ et $g$ définies sur un intervalle $]a,+\infty[$.
  Si pour tout $x \in ]a,+\infty[$, $f(x)\geq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ , alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

**Remarque :**
Pour des fonctions la propriété peut s'étendre à des limites quand $x$ tend vers $-\infty$, ou vers un réel $x_0$, ou pour des limites à droite ou à gauche (il suffit de modifier l'intervalle de définition).
Voici par exemple l'énoncé correspondant quand $x$ tend vers $x_0$ par valeurs supérieures :
Soit deux fonctions $f$ et $g$ définies sur un intervalle de la forme $]x_0, x_0+r[$ avec $r>0$.
Si pour tout $x \in ]x_0,x_0+r[$, $f(x)\geq g(x)$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} g(x)=+\infty$ , alors $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} f(x)=+\infty$.

**Propriété :**

- Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites numériques et soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
  Si pour tout $n \geq n_0$ , $u_n \leq v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.
- Soit deux fonctions $f$ et $g$ définies sur un intervalle $]a,+\infty[$.
  Si pour tout $x \in ]a,+\infty[$, $f(x)\leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

**Remarque :**
Pour des fonctions la propriété peut s'étendre à des limites quand $x$ tend vers $-\infty$, ou vers un réel $x_0$, ou pour des limites à droite ou à gauche (il suffit de modifier l'intervalle de définition).

**Propriété : théorème des gendarmes : Preuve 2**

- Soit $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ trois suites numériques et soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
  Si pour tout $n \geq n_0$, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
- Soit trois fonctions $f$, g et $h$ définies sur un intervalle $]a, +\infty[$.
  Si pour tout $x \in ]a,+\infty[$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

**Remarque :**
Pour des fonctions la propriété peut s'étendre à des limites quand $x$ tend vers $-\infty$, ou vers un réel $x_0$, ou pour des limites à droite ou à gauche (il suffit de modifier l'intervalle de définition).

## VI – Limites et composition

**Propriété :**
$a, b$ et $c$ sont trois réels. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} g o f(x) = c$.

**Remarque :**
La propriété s'étend aussi aux cas où $a, b$ et $c$ sont remplacés par $+\infty$ ou $-\infty$. La limite de la composée d'une suite et d'une fonction est un cas particulier de cette propriété.

**Exemple :**
Sur $]2 ; +\infty[$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x}{x-2}}$. On cherche à déterminer la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

On pose $u(x) = \dfrac{2x}{x-2}$ sur $]2 ; +\infty[$ ($u(x) > 0$) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 2$.

et $v(x) = \sqrt{x}$ sur $[0 ; +\infty[$ donc $\lim\limits_{x\to 2} v(x) = \sqrt{2}$.

Alors $v \circ u\,(x) = f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{2}$.

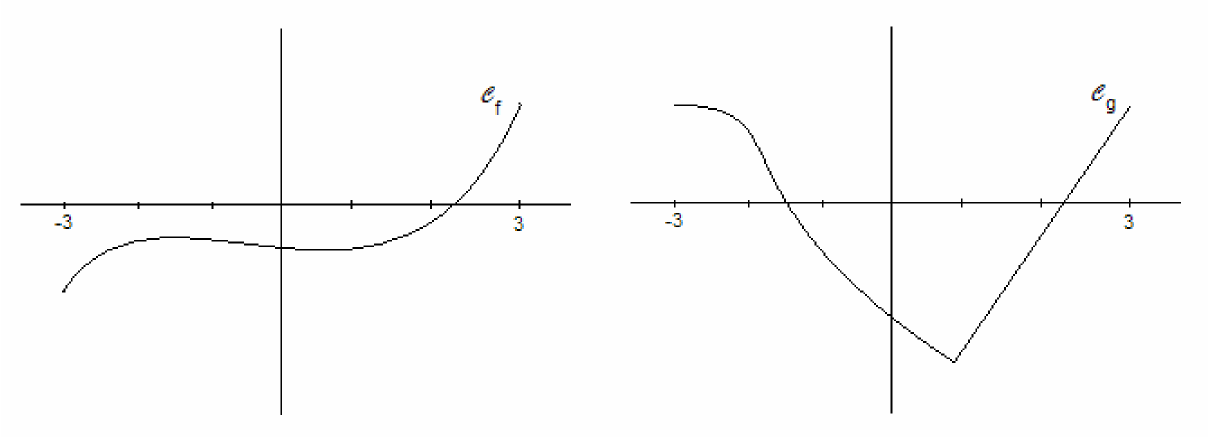
## VII – Continuité d'une fonction

**Définition :**
Soient $I$ un intervalle contenant un réel $a$ mais non réduit à ce réel, $f$ une fonction définie sur $I$.

- Dire que $f$ est continue en $a$ signifie que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- Dire que $f$ est continue sur $I$ signifie que $f$ est continue en tout réel de $I$.

**Interprétation graphique :**
Intuitivement, dire que $f$ est continue sur $I$ signifie qu'on peut tracer sa courbe sans lever le crayon ; autrement dit, la courbe ne présente pas de saut.

**Exemples :**



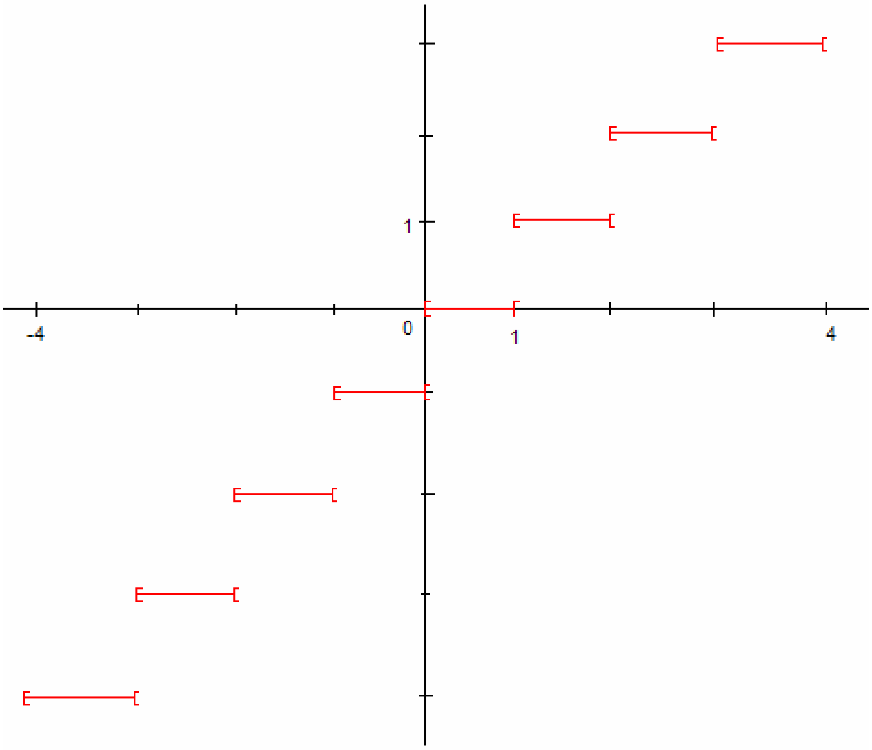

*f* et *g* sont définies sur $[-3;3]$ et continues car les courbes ne présentent pas de saut.

**Contre-exemple : fonction partie entière :**
Pour tout réel *x*, on définit la fonction partie entière, notée *E*(*x*), par *E*(*x*) = *n* où *n* est l'entier relatif tel que : $n \leq x < n+1$ (*n* est le plus grand entier inférieur où égal à *x*).

$E(3{,}01) = 3$

$E(4{,}9) = 4$

$E(-2{,}1) = -3$




La fonction partie entière n'est pas continue car il y a un saut dans la courbe à chaque point d'abscisse entière.
Plus précisément, pour *x* = *2*, $E(2) = 2$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} E(x) = 1 \neq E(2)$, donc *E* n'est pas continue en 2.

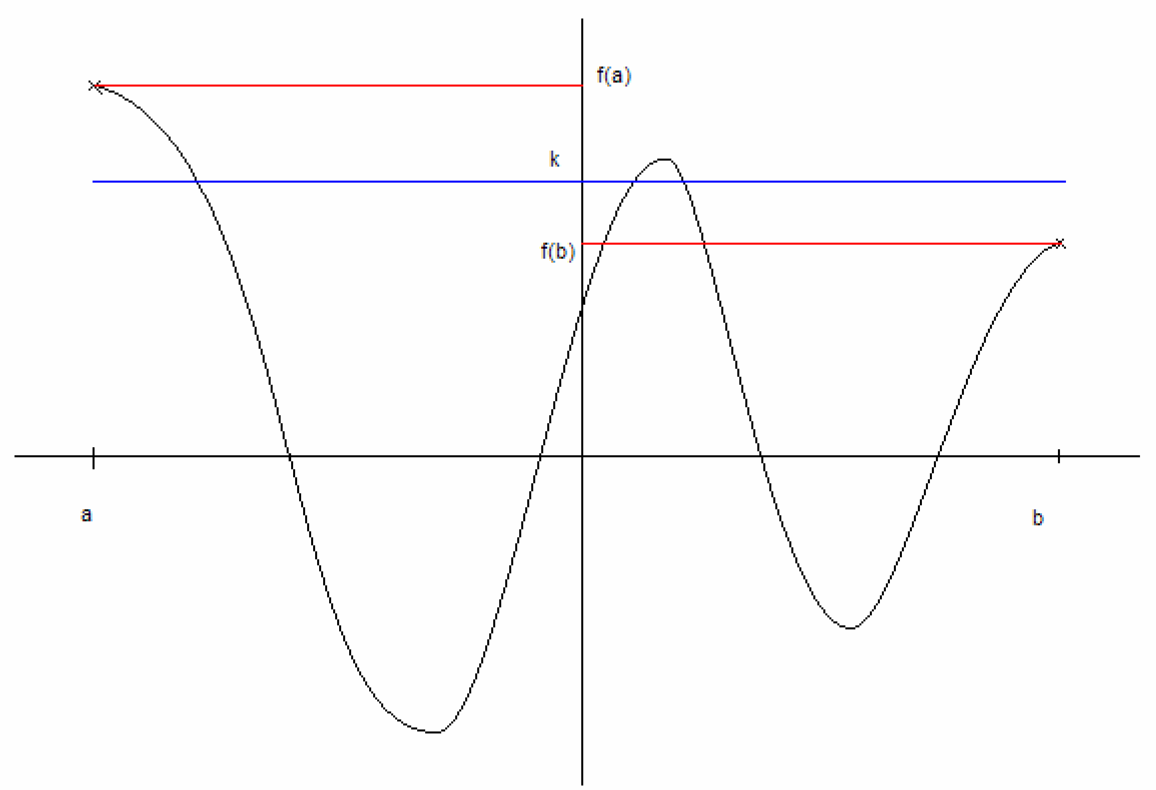
**Propriété (admise) :**

- Les fonctions polynômes, cosinus, sinus, exponentielle sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$.

- Toute fonction obtenue à partir d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de fonctions continues est continue sur son ensemble de définition.

## VIII – Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème (admis) :**
Soit une fonction *f* définie sur un intervalle *I* et continue sur *I*.
Soient *a* et *b* deux réels de *I* avec $a < b$.
Alors pour tout réel *k* compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $\alpha$ de $[a;b]$ tel que $f(\alpha) = k$.
Autrement dit : l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution $\alpha$ dans $[a;b]$ lorsque *k* est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.



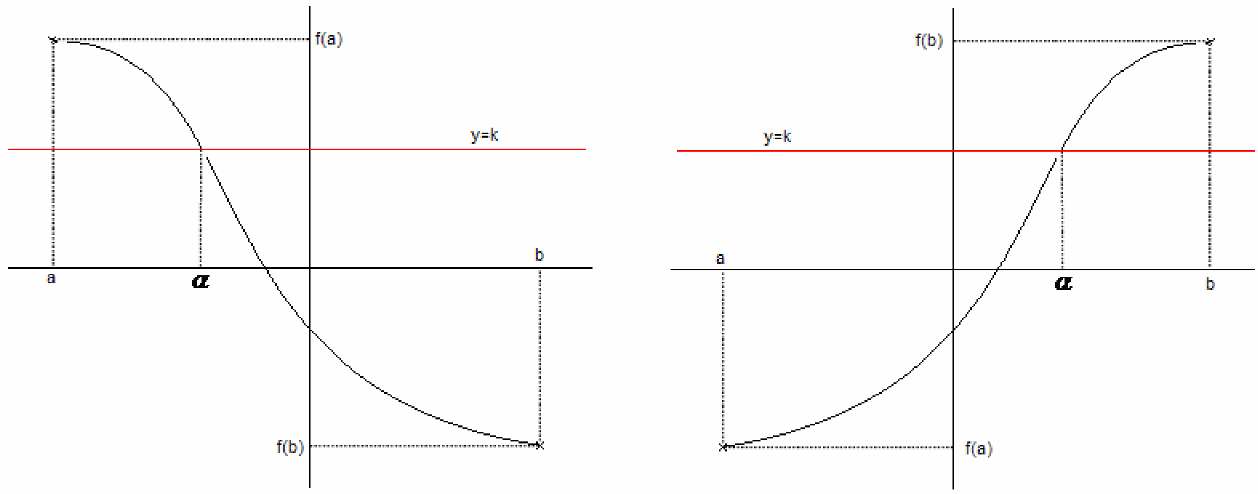

**Exemple :**
Pour tout réel *x*, on a $f(x) = x^5 + 2x - 1$.
L'équation $f(x) = 0{,}1$ a-t-elle une solution ?

- *f* est continue sur ℝ (c'est un polynôme).
- $f(0) = -1$ et $f(1) = 2$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme 0,1 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$, il existe au moins une solution à l'équation $f(x) = 0{,}1$ qui est comprise entre 0 et 1.

**Corollaire : Preuve 3**
On considère une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$ (*a* et *b* sont deux réels tels que $a < b$).

Si *f* est continue et strictement monotone sur $[a;b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ a une unique solution $\alpha$ dans $[a;b]$.




***f* est strictement décroissante** ***f* est strictement croissante**

**Remarque :**
Ce corollaire s'étend aux fonctions définies sur un intervalle non nécessairement fermé et non nécessairement borné.

**Exemple :**
On définit la fonction *f* sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+x}{\cos x}$.

Montrons que l'équation $f(x)=2$ a une unique solution dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

- *f* est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de fonctions continues.
- Pour tout réel *x*, $f'(x)=\dfrac{(2x+1)\cos x+(x^2+x)\sin x}{\cos^2 x}>0$ car $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

| $x$ | $0$ | $\alpha$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=+\infty$.

On admet que la flèche oblique dans ce tableau de variation représente la continuité et la stricte croissance de *f*.

D'après le tableau de variation, il existe une unique solution $\alpha$ dans $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ à l'équation $f(x) = 2$.