Chute verticale d'une bille dans un fluide

On étudie la chute verticale d'une bille de masse m et de volume V dans un liquide de masse volumique ρ_f. Le mouvement est vertical et s'effectue sur une droite $y'Oy$. On définit un vecteur unitaire $\vec{j}$ (vers le bas) sur cet axe et on utilise le repère $(O, \vec{j})$. On considère que la force de frottement exercée par le liquide s'écrit $f = kv$ (k est un coefficient qui dépend entre autres de la viscosité du liquide). On note g l'intensité du champ de pesanteur.

Bilan des forces

Système : {balle} ; référentiel terrestre supposé galiléen.

$\vec{P}$: le poids du système.
$\vec{F_A}$: la poussée d'Archimède.
$\vec{f}$: la force de frottement fluide.

D'après la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_G \Rightarrow \vec{P} + \vec{F_A} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}_G$$

Par projection suivant l'axe vertical :

$$P - F_A - f = m \cdot a_z$$

$$mg - \rho_f \cdot V \cdot g - k v_z = m \cdot a_z \quad \text{OR} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

$$mg - \rho_f \cdot V \cdot g - k v_z = m \frac{dv_z}{dt}$$

$$g - \frac{\rho_f \cdot V}{m} g - \frac{k}{m} v_z = \frac{dv_z}{dt} \quad \text{OR} \quad m = \rho_b \cdot V$$

$$g - \frac{\rho_f \cdot V}{\rho_b \cdot V} \cdot g - \frac{k}{m} v_z = \frac{dv_z}{dt}$$

$$g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_b}\right) - \frac{k}{m} v_z = \frac{dv_z}{dt}$$

On pose $a = -\frac{k}{m}$ et $b = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_b}\right)$

D'où l'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{dv_z}{dt} = a.v_z + b$$

Lorsque $v = v_{lim}$ (Régime permanent) : $\frac{dv}{dt} = 0$

d'où $a.v_{lim} + b = 0 \Rightarrow v_{lim} = -\frac{b}{a}$

$$v_{lim} = \frac{g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_b}\right)}{-\frac{k}{m}} = mg\,\frac{\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_b}\right)}{k}$$

D'où $k = \frac{mg\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_b}\right)}{v_{lim}} = \frac{\rho_b \cdot V \cdot g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_b}\right)}{v_{lim}} = \frac{V \cdot g\left(\rho_b - \rho_f\right)}{v_{lim}}$

Méthode d'Euler :

Méthode de résolution d'équations différentielles par itération.
Consiste à transformer une équation en une suite numérique.
Si Δt est petit, on peut écrire : $\frac{dv_z}{dt} \simeq \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$

Δt est appelé le pas d'itération.
L'équation différentielle devient :

$\frac{\Delta v_z}{\Delta t} = a.v_z + b$ or Δv_z est la variation de vitesse entre les dates t et $t+\Delta t$.

$\Delta v_z = v_z(t + \Delta t) - v_z(t)$.

Donc $\frac{v_z(t + \Delta t) - v_z(t)}{\Delta t} = a.v_z(t) + b$

$v_z(t + \Delta t) - v_z(t) = (a.v_z(t) + b)\,\Delta t$.

$v_z(t + \Delta t) = (a\,v_z(t) + b)\,\Delta t + v_z(t)$.

On pose $v_z(t) = v_n$, $v_z(t + \Delta t) = v_{n+1}$

$v_{n+1} = (a\,v_n + b)\,\Delta t + v_n$

On connaît la valeur de a, de b, de Δt, il suffit de se fixer le 1er terme v_0 (vitesse initiale de la bille).
On peut ensuite calculer tous les autres termes de la suite.