Exercice d'électromagnétisme

Condensateur cylindrique

ENONCE

Deux cylindres métalliques C_1 et C_2 de même axe Oz, de même hauteur h et de rayon R_1 et $R_2 > R_1$ portent des charges réparties uniformément en surface $Q_1 = +Q$ (à l'extérieur de C_1) et $Q_2 = -Q$ (à l'intérieur de C_2). Déterminer $\vec{E}(M)$ et $V(M)$ entre les deux cylindres par les méthodes classiques de l'électrostatique en indiquant les équations de MAXWELL sous-jacentes, et en déduire la capacité C de ce condensateur cylindrique.

Solution

Soit V_1 le potentiel de C_1 et V_2 le potentiel de C_2 (les deux conducteurs sont équipotentiels). La géométrie et les propriétés de symétrie du système conduisent à des surfaces équipotentielles qui sont des cylindres d'axe Oz et de rayon compris entre R_1 et R_2, et un champ électrique radial, dirigé comme sur la figure de C_1 vers C_2 si $Q_1 > 0$ et $Q_2 < 0$ (soit $V_1 > V_2$).

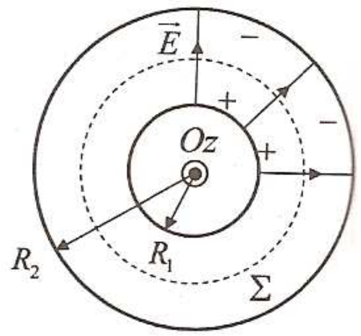

FIGURE 1 Orientation du champ électrique

Avec $\vec{E} = E(r)\overrightarrow{u_r}$, le théorème de Gauss (lié à l'équation de MAXWELL-GAUSS) à travers le cylindre équipotentiel Σ de rayon r (fermé sur les bases où le flux du champ est nul) s'écrit :

$$\Phi_\Sigma = \oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{E}.\overrightarrow{\mathrm{d}s} = 0 + \iint_{S_{lat}} E(r).\mathrm{d}S = E(r).2\pi r h = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

d'où

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r h}\overrightarrow{u_r}}$$

Ce champ est inhomogène entre les deux armatures (il décroît lorsque r augmente, ce qui est conforme au fait que les lignes de champ s'écartent).

Alors $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ (équation de MAXWELL-FARADAY) conduit à $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 rh}$ soit par intégration et en traduisant la condition en $r = R_1$:

$$\boxed{V(M) = V_1 - \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{r}{R_1}}$$

REMARQUE : l'utilisation simultanée des équations de MAXWELL-GAUSS et MAXWELL-FARADAY sous la forme de l'équation de Poisson, soit en l'absence de charges d'espace et en coordonnée cylindriques $\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = 0$, donne directement la dépendance $V(r)$.

La différence de potentiel entre les deux armatures est alors :

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

La capacité C est le rapport de la charge de l'armature positive $Q_1 = +Q$ à la différence de potentiel positive entre les deux armatures $V_1 - V_2$ (de manière générale $Q = CV$), soit ici :

$$\boxed{C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}$$

Ce résultat est bien homogène à $\varepsilon_0 \times longueur$, et la capacité C est d'autant plus importante que la hauteur h est grande et que les armatures sont proches ($R_2 \to R_1$).
