Courant électrique et distributions de courants

1 Courant électrique

1.1 Définition du courant électrique

On appelle *courant électrique* tout mouvement d'ensemble des particules chargées dans un référentiel.

Le point particulièrement important dans cette définition est le fait qu'il s'agisse d'un mouvement d'ensemble. En effet, toute particule est animée d'un mouvement descriptible au niveau microscopique dit d'agitation thermique, mouvement incessant et désordonné (*cf.* cours de thermodynamique). Ce mouvement n'est pas forcément observé au niveau macroscopique, échelle pour laquelle on ne s'intéresse qu'au mouvement moyen de plusieurs particules (le plus souvent en nombre très important. A ce mouvement d'agitation thermique s'ajoute un mouvement d'ensemble de toutes les particules ; ce mouvement est lié à une action extérieure que toutes les particules subissent et il est par conséquent identique d'une particule à l'autre.

De ce fait, la vitesse d'une particule i peut être décomposée en la somme :

$$\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{v_i^\star} + \overrightarrow{v_{i,e}}$$

où $\overrightarrow{v_i^\star}$ est la vitesse liée à l'agitation thermique et $\overrightarrow{v_{i,e}}$ la vitesse due à des causes extérieures.

La vitesse moyenne de N particules est définie au niveau mésoscopique (sur un élément de volume $\mathrm{d}\tau$ de l'ordre de $(10^{-6})^3\ \mathrm{m}^3$ par exemple) par :

$$< \vec{v} > = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{v_i} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{v_{i,e}}$$

En effet, le mouvement d'agitation thermique est nul en moyenne car il s'agit d'un mouvement désordonné (*cf.* cours de thermodynamique).

On s'intéresse donc ici au mouvement d'ensemble des particules chargées qui créé un courant électrique.

1.2 Divers types de courants électriques

On peut distinguer plusieurs types de courants électriques suivant leur origine.

- **Courant de conduction :**

Il s'agit du déplacement d'ensemble de particules chargées dans un milieu conducteur lié à l'existence d'un champ électrique $\vec{E}$.
Chaque particule de charge q, en plus de son mouvement d'agitation thermique, est soumise à une force :

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Toutes les charges de même type vont donc subir la même force et avoir un mouvement identique : on aura un mouvement d'ensemble donnant lieu à un courant électrique. L'origine électrique du courant permet de qualifier ce courant de *courant de conduction.*

- **Courant de convection :**

Les charges électriques sont parfois liées à des corps électriquement neutres et en mouvement. Le déplacement de ces corps entraîne celui des charges qui lui sont liées et l'existence d'un courant électrique liée à cet entraînement. On parle de *courant de convection.*

Dans ce type de courant, on classe aussi le mouvement des particules chargées qui se déplacent sous l'action d'un autre type de champ que le champ électrique (le champ de pesanteur par exemple).

Les courants de convection correspondent à l'entraînement des particules chargées sous une action autre qu'électromagnétique.

- **Courant de diffusion**

Les *courants de diffusion* sont liés aux déplacements pouvant se produire du fait d'un gradient de concentration des particules chargées. Le mouvement tend à réduire cette différence.

Dans la suite, on ne s'intéressera pas à l'origine du courant ; le point important est l'existence d'un courant électrique quelle que soit sa nature.

1.3 Intensité électrique

On rappelle la définition donnée dans le cours d'électrocinétique pour l'intensité du courant électrique à travers une surface $\mathrm{d}S$; c'est la charge totale qui traverse cette surface par unité de temps :

$$I_{\mathrm{d}S}(t) = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}t}$$

en notant δQ la charge traversant la surface $\mathrm{d}S$ entre t et $t + \mathrm{d}t$.

2 Densité de courant

2.1 Définition de la densité de courant

On considère un fil conducteur où les porteurs de charges sont d'une seule et même nature (par exemple des électrons). On note ρ_m la densité volumique de charges mobiles.

Sous l'action d'un champ électrique extérieur, les porteurs de charges sont animés d'un mouvement d'ensemble à la vitesse moyenne $\vec{v}$.

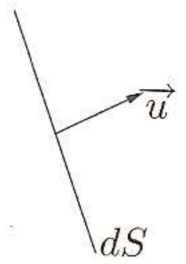

FIGURE 1 Surface élémentaire

On considère une surface $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à la surface $\mathrm{d}S$. On cherche à déterminer la quantité de charges qui la traversent entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

Entre t et $t + \mathrm{d}t$, les porteurs de charges parcourent en moyenne $v\mathrm{d}t$. Ceux qui traversent la surface S pendant cet intervalle de temps sont donc ceux contenus dans le volume correspondant en coupe à $ABCD$ (FIGURE 2) avec

$$BC = v\mathrm{dt} = AD$$

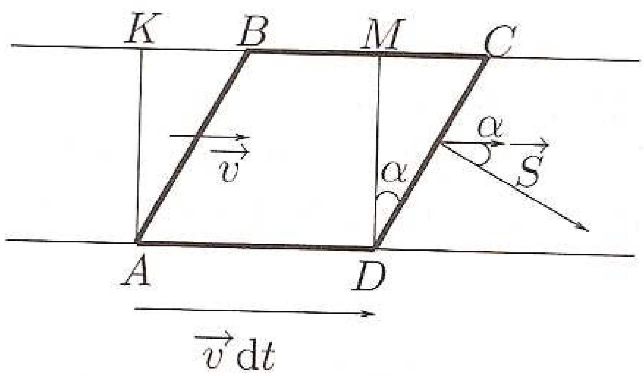

FIGURE 2 Densité de courant

Ce volume est le même que celui qui correspond en coupe à $AKMD$ (les triangles AKB et DMC sont identiques). Le volume est donc le produit de la longueur $v\mathrm{d}t$ par la surface représentée en coupe par AK qui vaut : $\mathrm{d}S\cos\alpha$.

Le volume est donc :

$$v\mathrm{d}S\cos\alpha\,\mathrm{d}t = \vec{v}.\,\mathrm{d}\vec{S}\mathrm{d}t$$

La charge qui traverse $\mathrm{d}\vec{S}$ entre t et $t+\mathrm{d}t$ est $\mathrm{d}^2q = \rho_m\vec{v}.\,\mathrm{d}\vec{S}\mathrm{d}t$, ce qui permet d'écrire l'intensité élémentaire $\mathrm{d}I$ sous la forme :

$$\mathrm{d}I = \rho_m\vec{v}.\,\mathrm{d}\vec{S} = \vec{j}.\,\mathrm{d}\vec{S}$$

en notant

$$\vec{j} = \rho_m\vec{v}$$

Cette relation définit le *vecteur densité de courant* $\vec{j}$ dont l'unité dans le système international est $\mathrm{A.\,m^{-2}}$.

L'intensité élémentaire $\mathrm{d}I$ est donc le flux du vecteur densité de courant à travers la surface orientée $\mathrm{d}\vec{S}$.

REMARQUES :

- Si $\mathrm{d}\vec{S}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, $\alpha = 0$ et $\mathrm{d}I = j\mathrm{d}S$.
- Si $\vec{j}$ n'est pas uniforme, $\vec{j}$ dépend de la position du point considéré. Il faut tenir compte de cette dépendance sur la surface, on calcule donc le flux de $\vec{j}$ à travers la surface S :

$$I = \iint_{M\in S}\vec{j}(M).\,\mathrm{d}\vec{S}_{\mathrm{M}}$$

- S'il y a plusieurs types de charges ou de porteurs de charges, on généralise la définition donnée pour la densité de courant par :

$$\vec{j} = \sum_i \rho_{m,i}\,\vec{v_i}$$

la somme portant sur les porteurs de charges. Ce sera notamment le cas des électrolytes comme par exemple une solution aqueuse de chlorure de sodium pour laquelle la densité de courant sera la somme de la densité de courant des ions chlorure Cl^- et de celle des ions sodium Na^+ :

$$\vec{j}_{\text{sol}} = \rho_{m,\text{Cl}^-}\vec{v}_{\text{Cl}^-} + \rho_{m,\text{Na}^+}\vec{v}_{\text{Na}^+}$$

La définition de l'intensité en fonction de $\vec{j}$ reste la même.

- Attention : il ne faut pas confondre la densité volumique de charges mobiles ρ_m utilisée ici avec la densité volumique de charges ρ définie en électrostatique : toutes les charges ne sont pas en mouvement ! Par exemple, dans un conducteur, on a un réseau cristallin fixe de densité de charges ρ_f et des éléments de conduction (par exemple des électrons) de densité de charges ρ_m. On ne s'intéresse ici qu'aux porteurs de charges mobiles. La neutralité électrique des conducteurs implique qu'en général :

$$\rho = \rho_f + \rho_m = 0$$

2.2 Lignes et tubes de courant

On définit :

- une *ligne de courant* comme une courbe en tout point tangente au vecteur densité de courant,
- Un *tube de courant* comme l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée.

2.3 Cas du régime stationnaire

En régime stationnaire, la densité volumique de courant ne varie pas au cours du temps. De plus, la conservation de la charge dans un volume d'un tube de courant délimité par deux sections S_1 et S_2 montre que le flux $\vec{j}$ à travers S_1 et à travers S_2 est le même (toutes les charges qui entrent en S_1 ressortent en S_2).

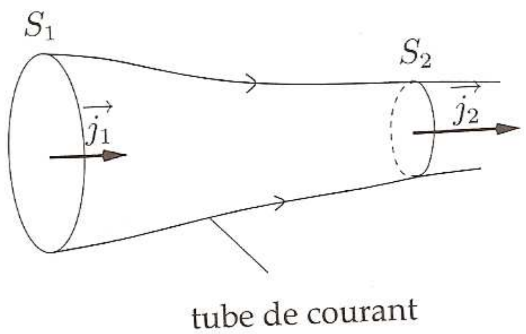

FIGURE 3 Caractère conservatif de la densité de courant

Cela impose à l'intensité d'être la même à travers toute section d'un même tube de courant. On dit que $\vec{j}$ est à *flux conservatif*.

2.4 Différentes distributions de courants

- **Densité volumique de courant :**

La densité de courant qui vient d'être introduite est une densité volumique de courant au même titre qu'a été introduite en électrostatique une densité volumique de charges.
On rappelle que la densité volumique de courant s'écrit :

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v}$$

où ρ_m est la densité volumique de charges mobiles et $\vec{v}$ la vitesse moyenne de ces charges mobiles.
La densité volumique de courant s'exprime en ampère par mètre carré ($\mathrm{A.m^{-2}}$). Il est important de bien noter l'unité par mètre carré.

- **Densité surfacique de courant :**

Dans certains cas, les courants sont confinés au voisinage d'une surface S d'épaisseur e faible devant les autres dimensions du problème. Il est alors souvent souhaitable de considérer une densité surfacique de courant telle que

$$\overrightarrow{j_{\mathrm{surf}}} = \lim_{e \to 0} (\vec{j} e)$$

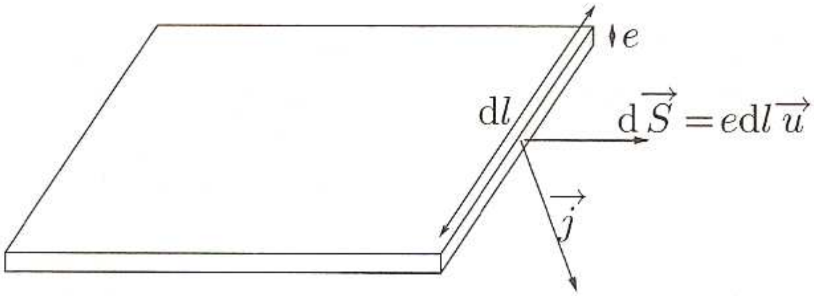

FIGURE 4 Densité surfacique de courant

Ou encore $\overrightarrow{j_{\mathrm{surf}}} = \int_0^e \vec{j}\mathrm{d}l = \vec{j}e$ en intégrant sur l'épaisseur si on peut supposer que la densité de courant est constante sur l'épaisseur.
En effet, l'intensité du courant à travers la surface $\mathrm{d}S$ est :

$$\mathrm{d}I = \vec{j}.\mathrm{d}S = \vec{j}.e\mathrm{d}l\vec{u} = \overrightarrow{j_{\mathrm{surf}}}.\mathrm{d}l\vec{u}$$

On en déduit pour e faible :

$$\overrightarrow{j_{\mathrm{surf}}} = \vec{j}.e$$

Qui est l'expression au premier ordre de la densité surfacique de courant définie plus hait par une limite quand e tend vers 0. On note que le vecteur unitaire $\vec{u}$ est lié à la surface orientée et qu'il est donc perpendiculaire à $\mathrm{d}l$.
La densité surfacique de courant j_{surf} s'exprime en $\mathrm{A.m^{-1}}$.

Cette modélisation introduit des discontinuités qui peuvent être « résolues » en réintroduisant l'épaisseur de la surface comme cela a été vu en électrostatique à propos de la densité surfacique de charges.

- **Densité linéique de courant :**

Il existe également des cas où les courants sont localisés le long d'un fil qui est alors un tube de courant de faible section. Le volume élémentaire peut s'exprimer par :

$$\mathrm{d}\tau = \overrightarrow{\mathrm{d}l}.\vec{S}$$

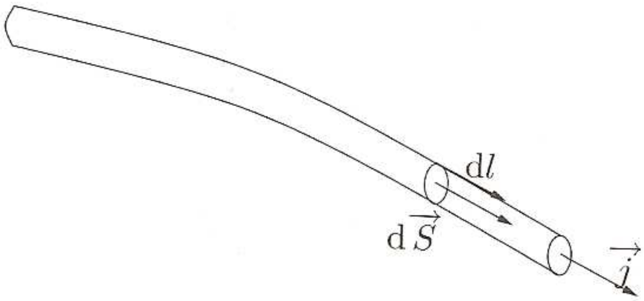

FIGURE 5 Densité linéique de courant

On en déduit l'expression du courant élémentaire :

$$\vec{j}\mathrm{d}\tau = \vec{j}(\overrightarrow{\mathrm{d}l}.\vec{S})$$

Dans le cas d'un tube de courant, ces vecteurs $\vec{j}$, $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ et $\vec{S}$ sont colinéaires donc on peut intervertir leurs positions relatives dans l'expression précédente :

$$\vec{j}\mathrm{d}\tau = (\vec{j}.\vec{S}).\overrightarrow{\mathrm{d}l} = I\overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

soit

$$I = \vec{j}.\vec{S}$$

Ceci correspond à une modélisation linéique qui sera très souvent utilisée. Ce sera la seule modélisation considérée dans la suite du cours de première année.

- **Cas d'une charge en mouvement :**

Pour une particule de charge q en mouvement à la vitesse $\vec{v}$, la densité de courant s'obtient directement à partir de la recherche de la quantité de charges qui traversent la surface $\mathrm{d}S$ entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.
La quantité $q\vec{v}$ remplace ici $I\overrightarrow{\mathrm{d}l}$.

On utilisera notamment ce résultat pour exprimer le courant lié au mouvement d'un électron autour du noyau décrit dans le cadre d'un modèle classique (l'électron décrit une orbite circulaire).

3 Invariances d'une distribution de courants

3.1 Invariance par translation

Une distribution de courants est invariante par translation lorsque l'image de la distribution par la translation est la distribution elle-même. Ceci n'est possible qu'avec une distribution s'étendant jusqu'à l'infini ; sinon la superposition entre la distribution et son image par translation n'est que partielle.

Ce type d'invariance permet de ne plus tenir compte de la dépendance selon cette direction. Par exemple, si on considère une distribution $\mathcal{D}$ invariante par toute translation le long de l'axe Ox alors $\vec{j}(x+a,y,z)=\vec{j}(x,y,z)$ pour toute valeur de a et donc $\vec{j}$ ne dépend pas de x :

$$\vec{j}=\vec{j}(y,z)$$

Ce sera par exemple le cas d'un fil rectiligne infini parcouru par une intensité I : on a invariance par toute translation le long de l'axe du fil.

3.2 Invariance par rotation

De même, l'invariance par rotation correspond au cas où la distribution obtenue après rotation se superpose rigoureusement avec la distribution initiale que ce soit en position dans l'espace ou en valeur locale de la densité de courants.

Ce type d'invariance permet de ne plus tenir compte de la dépendance selon l'angle de rotation considéré. Si on considère une distribution $\mathcal{D}$ invariante par toute rotation autour de l'axe Oz alors en utilisant les coordonnées cylindriques d'axe Oz $\vec{j}(r,\theta+\psi,z)=\vec{j}(r,\theta,z)$ pour toute valeur de ψ et donc $\vec{j}$ ne dépend pas de θ :

$$\vec{j}=\vec{j}(r,z)$$

Ce sera par exemple le cas d'un fil rectiligne parcouru par une intensité I : on a invariance par toute rotation autour de l'axe du fil.

Les invariances permettent donc de réduire le nombre de variables utiles.

❖❖❖