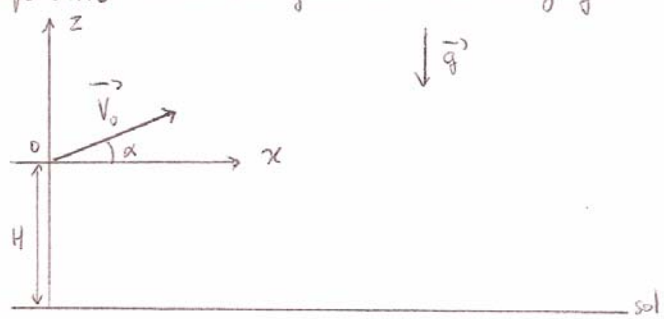
Deux exemples de mouvements plans

Exemple 1:

On considère un projectile évoluant dans le champ de pesanteur terrestre supposé uniforme.
Le projectile de masse m est lancé à la date $t = 0\,s$ d'un point O origine du repère $(O\,;\,x, z)$. Le vecteur vitesse initiale $\vec{V_0}$ fait un angle α quelconque avec l'horizontale. Le mouvement s'effectue dans le plan vertical contenant les axes Ox et Oz, tel que le champ de pesanteur $\vec{g}$ est parallèle à Oz. On se place dans le référentiel terrestre galiléen. On néglige toute résistance à l'air.



Question 1 : le vecteur accélération $\vec{a_G}$ du centre d'inertie G du projectile dépend-il des conditions initiales?

Réponse : NON
Preuve : Le projectile est soumis uniquement à son poids.
D'après la deuxième loi de Newton $\vec{P} = m.\vec{a_G}$ soit $m\vec{g} = m.\vec{a_G}$ donc $\vec{g} = \vec{a_G}$
Le vecteur accélération $\vec{a_G}$ du centre d'inertie du projectile ne dépend pas des conditions initiales.

Question 2 : Le projeté du centre d'inertie G du projectile sur l'axe vertical Oz est-il animé d'un mouvement rectiligne uniforme ?

Réponse : NON
Preuve : On a $\vec{a_G} = \vec{g}$. Par projection suivant l'axe vertical Oz : $a_{G_z} = -g$

Or $a_{G_z} = \frac{dv_z}{dt}$ donc $v_{G_z} = -gt + V_{0z}$ soit $v_{G_z} = -g.t + V_0 \sin\alpha$.

v_{G_z} varie au cours du temps, donc le mouvement du projeté de G suivant l'axe vertical Oz n'est pas uniforme.

Question 3 : La trajectoire du centre d'inertie G du projectile est-elle parabolique quel que soit la valeur de α ?

Réponse : NON

Preuve : il faut établir l'équation de la trajectoire de G.

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_{xG} = 0 \\ a_{zG} = -g \end{cases} \quad \vec{v}_G \begin{cases} v_{xG} = v_{0x} = V_0 \cdot \cos\alpha \\ v_{zG} = -g.t + V_0 \cdot \sin\alpha \end{cases} \quad \vec{OG} \begin{cases} x_G = (V_0 \cdot \cos\alpha)t \\ z_G = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha t) \end{cases}$$

On peut écrire que $t = \frac{x_G}{V_0 \cdot \cos\alpha}$, on remplace cette expression dans l'expression de z_G :

$$z_G = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x_G}{V_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2 + (V_0 \cdot \sin\alpha) \cdot \frac{x_G}{V_0 \cdot \cos\alpha}$$

$$z_G = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x_G}{V_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2 + x_G \cdot \tan\alpha .$$

Cette équation de trajectoire correspond effectivement à une parabole sauf si $\alpha = 90°$.

Si $\alpha = 90°$

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_{xG} = 0 \\ a_{zG} = -g \end{cases} \quad \vec{v}_G \begin{cases} v_{xG} = v_{0x} = V_0 \cdot \cos\alpha = 0 \\ v_{zG} = -gt + V_0 \cdot \sin\alpha \\ v_{zG} = -g.t + V_0 \end{cases} \quad \vec{OG} \begin{cases} x_G = 0 \\ z_G = -\frac{1}{2} gt^2 + V_0 t \end{cases}$$

Alors la trajectoire serait un segment de droite verticale.

Question 4 : Dans le cas où le projectile est lancé d'une hauteur H au-dessus du sol avec une vitesse $\vec{V}_0$ horizontale, l'abscisse de son point de chute est-elle $x = V_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$? On rappelle qu'à t = 0, le projectile est en O, origine du repère.

Réponse : OUI

Preuve : On reprend les coordonnées du vecteur position établies avec $\alpha = 0$ (vecteur vitesse initiale horizontal).

$\vec{OG} \begin{cases} x_G = (V_0 \cdot \cos\alpha)t \\ z_G = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \cdot \sin\alpha)t \end{cases}$ soit $\vec{OG} \begin{cases} x_G = V_0 t \\ z_G = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

lorsque $z_G = -H$, alors le projectile touche le sol. Ceci a lieu à l'instant noté t_S.

$-H = -\frac{1}{2}gt_S^2$

soit $t_S^2 = \frac{2H}{g}$ donc $t_S = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

On calcule alors l'abscisse x_G à cet instant : $x_G = V_0 \cdot t_S$

$x_G = V_0 \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}$

Exemple 2 :

On considère un satellite artificiel soumis uniquement à la force gravitationnelle de la Terre. Le satellite de masse m, situé à l'altitude h par rapport au sol terrestre est animé d'un mouvement circulaire et uniforme à la vitesse V. On se place dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

Données :
- rayon de la Terre : $R_T = 6\,380$ km
- masse de la Terre : $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg.
- Constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \times 10^{-11}$ S.I.

Question 1 : La constante de gravitation universelle s'exprime-t-elle en $m.s^{-2}$?

Réponse : NON

Preuve : La force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite a pour expression :

$$F_{T/S} = G \cdot \frac{m \cdot M_T}{(R_T+h)^2} \quad \text{soit} \quad G = \frac{F_{T/S} \times (R_T+h)^2}{m \times M_T}$$

Procédons à une analyse dimensionnelle ; tout d'abord pour la force $F_{T/S}$: d'après la seconde loi de Newton $F_{T/S} = m \times a$.

$$[F] = [M] \times \frac{[L]}{[T]^2}$$

donc $[G] = [M] \times \frac{[L]}{[T]^2} \times [L]^2 \times [M]^{-1} \times [M]^{-1}$

$$[G] = \frac{[L]^3}{[T]^2} \times [M]^{-1}$$ d'où G s'exprime en $m^3.s^{-2}.kg^{-1}$

Question 2 : Le vecteur accélération $\vec{a_G}$ du centre d'inertie du satellite est-il centripète ?

Réponse : OUI

Preuve : D'après la deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F_{ext}} = m.\vec{a_c}$

La seule force subie par le satellite est la force $\vec{F}_{T/S}$ exercée par la Terre. Or cette force a pour direction une droite passant par le centre de la Terre et son sens est orienté du satellite vers le centre de la Terre.

Donc effectivement, $\vec{a_c}$ est centripète.

Question 3 : La vitesse du satellite est-elle donnée par la relation $V = \sqrt{\frac{GM_T}{(R_T+h)}}$?

Réponse : OUI

Preuve : $\vec{F}_{T/S} = m.\vec{a_c}$.

Soit $\vec{n}$ un vecteur mobile dont la direction est une droite joignant le centre du satellite au centre de la Terre et le sens est orienté du satellite vers la Terre.

Alors $\vec{a_c} = \frac{V^2}{(R_T+h)}.\vec{n}$ $\quad \vec{F}_{T/S} = m\frac{V_2}{(R_T+h)}.\vec{n}$

Par projection on obtient $F_{T/S} = m\frac{V^2}{(R_T+h)}$

$$G.\frac{m.M_T}{(R_T+h)^2} = m\frac{V^2}{(R_T+h)} \Rightarrow G.\frac{M_T}{(R_T+h)} = V^2$$

Soit $V = \sqrt{\frac{G.M_T}{(R_T+h)}}$

Question 4 : A l'altitude $h = 12\,800$ km, la période de révolution du satellite vaut-elle $2,64 \times 10^4$ s ?

Réponse : OUI

Preuve : le satellite effectue une révolution en une durée T. Il parcourt la trajectoire supposée circulaire de longueur égale à $2\pi(R_T + h)$ pendant une durée T et ce à une vitesse supposée constante de valeur $V = \sqrt{\dfrac{G.M_T}{(R_T+h)}}$

$$V = \frac{2\pi\,(R_T + h)}{T} = \sqrt{\frac{G.M_T}{(R_T+h)}}$$

$$T = \frac{2\pi\,(R_T+h)}{\sqrt{\dfrac{G.M_T}{(R_T+h)}}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2.(R_T+h)^2 \times (R_T+h)}{G.M_T} = \frac{4\pi^2.(R_T+h)^3}{G.M_T}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \times ((6380 + 12\,800) \times 10^3)^3}{6,67 \times 10^{-11} \times 5,98 \times 10^{24}} = 6,98 \times 10^8.$$

donc $T = 2,64 \times 10^4$ s.