Dossier de révision de thermodynamique

Partie 1

Rayonnement thermique[1]

Partie 1 Questions de cours

Vocabulaire et définitions

QUESTION 1 Qu'appelle-ton transfert thermique radiatif ? Préciser par quel objet physique, et comment l'énergie est transférée.

Le transfert thermique radiatif est un transfert d'énergie interne entre deux corps séparés par du vide ou par un milieu transparent. L'énergie est transférée par des ondes électromagnétiques (ou des photons).

Chaque corps émet un rayonnement électromagnétique dû à l'agitation thermique des particules chargées qui le constituent : il y a conversion d'énergie interne en énergie de rayonnement ou énergie électromagnétique.

Chaque corps absorbe une partie ou la totalité du rayonnement qu'il reçoit. Il y a conversion d'énergie électromagnétique en énergie interne.

QUESTION 2 A une onde électromagnétique de longueur d'onde dans le vide λ, de fréquence ν, on associe un photon d'énergie E. Rappeler la relation entre λ, ν et c (vitesse de la lumière dans le vide) et préciser les unités, puis la relation entre E, ν et h, la constante de PLANCK. Quelle est l'unité de h ?

[1] Certains exercices nécessitent des connaissances sur d'autres chapitres et notamment sur la conduction thermique.

Situer sur une échelle de longueurs d'onde, les ondes électromagnétiques correspondant à un rayonnement visible, un rayonnement ultraviolet UV, un rayonnement infrarouge IR.

$\boxed{\lambda = \frac{c}{\nu}}$ avec λ en m, c en $\mathrm{m.s^{-1}}$ et ν en Hz ; $\boxed{E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}}$ avec h en J.s.

L'ultraviolet (UV) s'étend en gros de 10 nm à 400 nm = 0,4 μm, le spectre visible de 400 nm = 0,4 μm à 800 nm = 0,8 μm, et l'infrarouge (IR) de 0,8 μm à 1000 μm = 1 mm.

QUESTION 3 Définir les milieux transparents et les milieux opaques pour les ondes électromagnétiques.

Un milieu transparent n'absorbe pas les ondes électromagnétiques. Une fraction de l'onde est réfléchie, l'autre est transmise.

Un corps opaque ne transmet pas les ondes électromagnétiques. Une onde incidente est en partie réfléchie et l'autre partie est absorbée.

QUESTION 4 Pour établir un bilan d'énergie pour un corps opaque, on définit des flux surfaciques φ tous positifs ici : incident, réfléchi, absorbé, partant et émis. Quelle est l'unité de ces flux ?

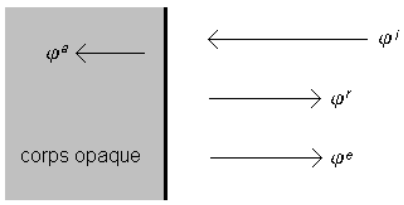

FIGURE 1 Bilan d'énergie pour un corps opaque

Sur la FIGURE 1 ci-dessus, ont été représentés des flux. Attribuer à chaque flux φ^k son nom, puis donner deux relations entre ces flux.

On définit le flux surfacique radiatif surfacique $\varphi^R = \varphi^p - \varphi^i$. A quelle condition un corps est-il dit en équilibre radiatif avec le rayonnement qui l'entoure ?

L'unité de flux est le $\mathrm{W.m^{-2}}$ (comme pour un vecteur de POYNTING).

φ^i est le flux incident, φ^r le flux réfléchi et φ^a le flux absorbé : alors $\boxed{\varphi^i = \varphi^r + \varphi^a}$.

φ^e est le flux émis, alors le flux partant φ^p est la somme : $\boxed{\varphi^p = \varphi^r + \varphi^e}$.

Un corps est dit en équilibre radiatif avec le champ de rayonnement qui l'entoure si le flux radiatif est nul : $\boxed{\varphi^R = \varphi^p - \varphi^i = 0}$.

Alors le flux partant est égal au flux incident $\boxed{\varphi^p = \varphi^i}$ et par conséquent le flux émis est égal au flux absorbé $\boxed{\varphi^e = \varphi^a}$.

QUESTION 5 On considère une enceinte opaque fermée, maintenue à la température T et délimitant une cavité vide ou remplie d'un milieu transparent d'indice unité (l'air en pratique).

Définir le rayonnement d'équilibre radiatif à la température T dans cette cavité. Il lui correspond une densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em}. Quelle est son unité ?

Le rayonnement d'équilibre radiatif à la température T est le rayonnement du champ électromagnétique qui existe dans l'enceinte quand elle est maintenue à la température T. L'unité de u_{em} est le $\mathrm{J.m^{-3}}$.

Les lois du rayonnement

QUESTION 6 Les ondes électromagnétiques (ou les photons) dans l'enceinte ont *a priori* toutes les longueurs d'ondes λ et donc aussi toutes les fréquences ν possibles. La contribution élémentaire des ondes de fréquence comprise entre ν et $\nu + \mathrm{d}\nu$, ou de longueur d'onde comprise entre λ et $\lambda + \mathrm{d}\lambda$, au flux surfacique incident d'un rayonnement en équilibre radiatif à la température T, reçu par une surface, s'écrit :

$$\mathrm{d}\varphi^i = \varphi^i_\lambda(\lambda, T).\mathrm{d}\lambda = \varphi^i_\nu(\nu, T).\mathrm{d}\nu$$

où $\varphi^i_\lambda(\lambda, T)$ est appelée densité spectrale en longueur d'onde du flux incident.

Elle est donnée par la **loi de PLANCK** :

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi^i_\lambda(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}}}$$

Donner le nom des constantes c, k_B et h.

Etablir la relation entre $\mathrm{d}\lambda$ et $\mathrm{d}\nu$ et en déduire l'expression de la densité spectrale en fréquence du flux incident $\varphi^i_\nu(\nu, T)$.

c est la vitesse de la lumière dans le vide, k_B est la constante de BOLTZMANN et h la constante de PLANCK.

Longueur d'onde et fréquence varient en sens inverse, on convient pour faire correspondre $\mathrm{d}\nu > 0$ à $\mathrm{d}\lambda > 0$, de poser

$$\mathrm{d}\nu = -\mathrm{d}\left(\frac{c}{\lambda}\right) = c\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2} = \frac{\nu^2}{c}\mathrm{d}\lambda$$

conduisant à

$$\varphi^i_\nu(\nu, T) = \frac{c}{\nu^2}\varphi^i_\lambda(\lambda, T)$$

d'où la densité spectrale du flux en fréquence :

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi_\nu^i(\nu,T) = \frac{2\pi h}{c^2}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}-1}}}$$

QUESTION 7 L'intégration de $\mathrm{d}\varphi^i = \varphi_\nu^i(\nu,T).\mathrm{d}\nu$ sur toutes les fréquences du spectre électromagnétique du rayonnement en équilibre thermique à la température T conduit au flux surfacique total. Enoncer la loi de STEFAN qui donne la dépendance en température du flux surfacique total $\varphi^i(T)$ et donner l'unité de la constante σ qui y apparaît.

L'intégration sur toutes les fréquences $\varphi^i(T) = \int_0^\infty \varphi_\nu^i(\nu,T).\mathrm{d}\nu$ (*cf.* EXERCICE 15) conduit à un flux fonction uniquement de la température de l'enceinte, c'est la **loi de STEFAN** :

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi^i(T) = \sigma T^4}}$$

$\sigma = 5{,}67.10^{-8}\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-4}}$ est la constante de STEFAN.

QUESTION 8 Pour un rayonnement en équilibre radiatif avec la matière à la température T, la densité spectrale $\varphi_\lambda^i(\lambda,T)$ en longueur d'onde du flux passe par un maximum pour une longueur d'onde λ_m telle que : $\lambda_m T = \frac{hc}{4{,}964 k_B} = A$ appelée **loi de WIEN**.

Evaluer la constante A en $\mathrm{\mu m.K}$ avec 3 chiffres significatifs sachant que :

$k_B = 1{,}381.10^{-23}\ \mathrm{J.K^{-1}}$, $h = 6{,}626.10^{-34}\ \mathrm{J.s}$ et $c = 2{,}998.10^{8}\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

$A = 2{,}898.10^{-3}\ \mathrm{m.K} \approx 2900\ \mathrm{\mu m.K}$ d'où la **loi de Wien** :

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda_m T \approx 2900\ \mu m.K}}$$

QUESTION 9 Environ 98 % de l'énergie de rayonnement d'équilibre reçue par une surface est comprise dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\lambda_m, 8\lambda_m\right]$ appelé étendue spectrale du rayonnement d'équilibre à une température donnée.

Dans un four dont les parois sont à la température de 1000 K, quel est ce domaine spectral ?

On calcule λ_m par la loi de WIEN : $\lambda_m T \approx 2900\ \mathrm{\mu m.K}$ d'où $\lambda_m = 2{,}9\ \mathrm{\mu m}$ dans l'infrarouge, d'où le domaine spectral : $1{,}45\ \mathrm{\mu m} < \lambda < 23\ \mathrm{\mu m}$.

98 % de l'énergie reçue se situe dans l'infrarouge (et même davantage puisque l'infrarouge dépasse ce domaine).

Le corps noir

QUESTION 10 Donner la définition d'un corps noir.

Un corps noir est un corps qui absorbe l'intégralité du rayonnement électromagnétique qu'il reçoit.

Un corps noir isotherme à la température T émet un rayonnement thermique présentant les mêmes caractéristiques qu'un rayonnement d'équilibre à la température T.

QUESTION 11 Quel est le flux surfacique φ^e émis par un corps noir isotherme à la température T ?

La densité spectrale de flux surfacique émis par un corps noir est égale à la densité spectrale de flux surfacique du rayonnement d'équilibre à la température T :

$$\varphi_{CN}^e(\lambda, T) = \varphi_\lambda^i(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

– Pour quelle valeur de $\lambda = \lambda_m$, $\varphi_{CN}^e(\lambda)$ passe-t-elle par un maximum ?
– Entre quelles valeurs de λ, 98 % de l'énergie est-elle émise par un corps noir à la température T ?

Un corps noir isotherme à la température T émet un rayonnement thermique présentant les mêmes caractéristiques qu'un rayonnement d'équilibre à la température T. D'après la loi de STEFAN, il émet $\varphi_{CN}^e(T) = \sigma T^4$.

– Il suffit de faire référence à la loi de WIEN : $\lambda_m T \approx 2900\ \mu\mathrm{m.K}$.
– Le flux surfacique émis est compris dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\lambda_m, 8\lambda_m\right]$.

QUESTION 12 Un corps noir convexe est à la température T. Il est placé dans une enceinte en équilibre thermique à la température T_0 et on s'intéresse à son bilan radiatif.

Pourquoi le corps noir doit-il être de petite taille ? Pourquoi prendre un corps convexe ?

Donner le flux surfacique radiatif φ_{CN}^R cédé par un corps noir du fait des processus d'émission et d'absorption.

Si la surface du corps noir est S, quelle est la puissance radiative P^R (aussi appelée flux radiatif) cédée par ce corps noir ?

Pour T proche de T_0, montrer que l'on peut écrire $P^R \approx Sh(T - T_0)$. Déterminer h en fonction de T_0 et σ et commenter ce résultat.

Le corps noir doit être de petite taille afin que son flux émis ne perturbe pas le rayonnement d'équilibre de l'enceinte. De plus, il ne doit pas être concave afin que certaines parties du corps noir ne reçoivent pas le rayonnement du corps noir (auquel cas il aurait plutôt tendance à abriter un rayonnement d'équilibre à la température T).

Le bilan radiatif du corps noir entre le flux émis à la température T et le flux reçu du rayonnement en équilibre thermique à la température T_0 conduit à :

$$\varphi_{CN}^{R} = \sigma(T^4 - T_0^4)$$

Sur la surface S, cela correspond à une puissance rayonnée $P^R = S\sigma(T^4 - T_0^4)$.

Pour T proche de T_0, on pose $T = T_0(1 + \varepsilon)$ soit $T^4 \approx T_0^4(1 + 4\varepsilon)$, et finalement :

$$\Phi^R = S\sigma(T^4 - T_0^4) \approx 4S\sigma T_0^3(T - T_0)$$

Le flux radiatif suit alors une loi de NEWTON avec un coefficient de transfert de surface $h = 4\sigma T_0^3$.

Partie 2 Conseils et erreurs à éviter pour les exercices

- Les flux surfaciques sont définis positifs, mais ils correspondent à des échanges d'énergie. Lors d'un bilan thermodynamique, leur donner alors un signe avec la convention thermodynamique habituelle : un flux effectivement reçu est compté positif et un flux partant est compté négatif.
- Faire un effort pour nommer correctement les trois lois sur le rayonnement : la loi de PLANCK (1899), la loi de STEFAN (1879) et la loi de WIEN (1893) (les deux dernières qui dans le cours apparaissent comme une conséquence de la loi de PLANCK, ont en fait été établies antérieurement). Comme en thermodynamique, la température T qui y apparaît doit s'exprimer en Kelvin dans les applications numériques ; il faut donc penser à faire la conversion sachant que dans de nombreux cas, la température est donnée en °C.
- Le maximum de la densité spectrale en fréquence du flux n'est pas le même que celui de la densité spectrale en longueur d'onde du flux ; on montre que $\varphi_\nu^i(\nu,T)$ est maximale pour $\nu'_m = \frac{2{,}821 k_B T}{h}$ correspondant à $\lambda'_m T \approx 5100\ \mu\mathrm{m.K}$.
- Le corps noir est un modèle et aucun corps réel n'a rigoureusement ses propriétés. Cependant le fait de définir une étendue spectrale limitée pour un rayonnement thermique autorise de nombreux corps réels à être modélisés par un corps noir. Ainsi une feuille de papier blanche à 300 K se comporte comme un corps réfléchissant toutes les longueurs d'onde du visible, mais pour son émission, elle se comporte comme un corps noir car elle émet essentiellement dans l'infrarouge.
- Dans certains cas, les flux radiatifs comme le flux d'un laser ou du Soleil au niveau de la Terre sont unidirectionnels. La puissance reçue par un corps dépend alors de l'orientation de la surface : $P_{reçue} = \varphi^i \times S_{proj}$ où S_{proj} est la surface projetée du corps sur un plan perpendiculaire à la direction des rayons incidents.
- Il arrive souvent que l'on ait besoin de linéariser une différence $T^4 - T_0^4$ lorsque T est très proche de T_0. Pour faire cela rapidement (sans passer par un développement limité après avoir posé $\varepsilon = 1 - \frac{T}{T_0}$ ou $\varepsilon = 1 - \frac{T_0}{T}$…), il suffit de factoriser en portant $T = T_0$ dans les sommes :

$$T^4 - T_0^4 = (T^2 - T_0^2)(T^2 + T_0^2) \approx (T - T_0)(T + T_0)(2T_0^2) \approx 4T_0^3(T - T_0)$$

Partie 3 Exercices d'application directe du cours

EXERCICE 13 Quel est l'ordre de grandeur, en électron-volt, de l'énergie d'un photon correspondant à un rayonnement :

a) visible : $\lambda = 550$ nm ? b) UV : $\lambda = 100$ nm ? c) IR : $\lambda = 10$ µm ?

L'énergie E d'un photon est reliée à la longueur d'onde λ par la relation : $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$.

En exprimant E en eV et λ en nm, il vient la formule semi-numérique : $E = \frac{1241}{\lambda}$.

a) visible : $E = 2{,}25$ eV b) UV : $E = 12{,}4$ eV c) IR : $E = 0{,}12$ eV

De manière générale, on peut retenir : 10 eV pour l'UV, 1 eV pour le visible et 0,1 eV pour l'IR.

EXERCICE 14 Un laser Hélium-Néon émet une lumière quasi-monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 633$ nm. La puissance P du faisceau est de 1 mW, la section circulaire du faisceau a un diamètre $d = 2$ mm.

Déterminer l'énergie d'un photon et le flux de photons, c'est-à-dire le nombre de photons par seconde qui traverse la section.

Calculer la densité de flux surfacique φ^i.

L'énergie d'un photon est $E = \frac{hc}{\lambda} = 3{,}14.10^{-19}$ J $= 1{,}96$ eV.

Chaque seconde, une puissance $P = 1$ mW traverse la section $S = \frac{\pi d^2}{4}$ donc le flux de photons est $\frac{P}{E} = 3{,}18.10^5$ photons par seconde correspondant à une densité de flux surfacique $\varphi^i = \frac{P}{S} = 318\ \mathrm{W.m^{-2}}$ (c'est la norme du vecteur de POYNTING).

EXERCICE 15 Effectuer l'intégration sur toutes les fréquences du spectre $\varphi^i(T) = \int_0^\infty \varphi_\nu^i(\nu, T).\mathrm{d}\nu$ avec $\varphi_\nu^i(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}-1}$ conduisant à la loi de STEFAN pour le flux sachant que $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}$ et donner l'expression de la constante de STEFAN σ. Application numérique.

En posant

$$x = \frac{h\nu}{k_B T}$$

l'intégrale s'écrit :

$$\varphi^i(T) = \frac{2\pi h}{c^2}\frac{k_B^4 T^4}{h^4}\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\mathrm{d}x = \frac{2\pi h}{c^2}\frac{k_B^4 T^4}{h^4}\frac{\pi^4}{15}$$

ce qui permet d'établir la loi de STEFAN

$$\varphi^i(T) = \sigma T^4$$

et de donner l'expression de la constante de STEFAN :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2}}}$$

L'application numérique donne la valeur $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{5{,}67.10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}}$.

EXERCICE 16 A l'intérieur d'un four de cuisine la température T est de l'ordre de $300\ °\mathrm{C}$. Sachant que le rayonnement est en équilibre thermique :

- déterminer la longueur d'onde λ_m correspondant au maximum de la densité spectrale de flux surfacique en longueur d'onde,
- donner l'étendue spectrale du rayonnement d'équilibre du four à cette température.

La loi de WIEN $\lambda_m T \approx 2900\ \mu\mathrm{m.K}$ avec $T = 573\ \mathrm{K}$ donne $\lambda_m = 5{,}1\ \mu\mathrm{m}$.

98 % de l'énergie est compris entre $\frac{1}{2}\lambda_m$ et $8\lambda_m$, soit $2{,}55\ \mu\mathrm{m} < \lambda < 41\ \mu\mathrm{m}$: le rayonnement d'équilibre est essentiellement constitué de rayonnement infrarouge.

EXERCICE 17 Un tube de radiateur infrarouge d'un grille pain est cylindrique de rayon $r = 0{,}4\ \mathrm{cm}$ et de longueur $l = 21\ \mathrm{cm}$; il rayonne une puissance $P = 550\ \mathrm{W}$ et on admet qu'il se comporte comme un corps noir.

Calculer sa température T et l'étendue spectrale du rayonnement émis à cette température.

D'après la loi de STEFAN, la puissance rayonnée est liée à sa température T par la relation :

$P = S\sigma T^4 = 2\pi r l \sigma T^4$ d'où $T = \left(\frac{P}{2\pi r l \sigma}\right)^{\frac{1}{4}}$ soit

$$\boldsymbol{T = 1164\ \mathrm{K} \approx 890\ °\mathrm{C}}$$

D'après la loi de WIEN, la densité spectrale est maximale pour :

$$\lambda_m = \frac{2900}{1164} \approx 2{,}5\ \mu\mathrm{m}$$

98 % de l'énergie est compris entre $\frac{1}{2}\lambda_m$ et $8\lambda_m$, soit $1{,}25\ \mu\mathrm{m} < \lambda < 20\ \mu\mathrm{m}$: le rayonnement d'équilibre est essentiellement constitué de rayonnement infrarouge.

EXERCICE 18 Rayonnement et convection

Quels sont les ordres de grandeur de la puissance perdue par le mur d'une maison de surface $S = 10\ \mathrm{m}^2$ dont la température extérieure est $T = 10\ °\mathrm{C}$:

a) Par convection de l'air extérieur à la température $T_0 = 0\ °\mathrm{C}$ (le coefficient de conducto-convection de la loi de NEWTON est $h = 10\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}}$) ?
b) Par rayonnement en le considérant comme un corps noir. Préciser aussi λ_m longueur d'onde pour laquelle la densité spectrale est maximale.
c) Comparer les deux puissances ; le bilan est-il complet ? Commenter.

a) La loi de NEWTON donne la norme du vecteur densité de flux thermique $\vec{j}_{th}$:

$$j_{th} = h(T - T_0)$$

La puissance cédée par convection à l'air par le mur est alors :

$$P_{convect} = j_{th}S = h(T - T_0)S$$

soit numériquement

$$\boldsymbol{P_{convect} \approx 1\ \mathrm{kW}}$$

b) La loi de STEFAN donne la puissance rayonnée par le mur :

$$P_{Stefan} = \sigma T^4 S$$

soit numériquement (attention à bien convertir T en Kelvin) :

$$\boldsymbol{P_{Stefan} \approx 4\ \mathrm{kW}}$$

Par la loi de déplacement de WIEN :

$$\lambda_m T = cste \approx 2900\ \mathrm{\mu m.K}$$

ce qui donne

$$\boldsymbol{\lambda_m = 10,2\ \mathrm{\mu m}}$$

correspondant à de l'infrarouge lointain.

c) Il ne faut pas pour autant en conclure que la puissance perdue est majoritairement rayonnée : en effet, l'air extérieur rayonne lui aussi vers le mur, et il faut en tenir compte.

Imaginons que le mur soit en équilibre avec l'air extérieur, et donc à la température T_0. Il ne perdrait alors aucune puissance et recevrait donc autant de puissance qu'il en céderait, soit $\sigma T_0^4 S$. On en déduit que l'air à la température T_0 rayonne vers le mur $\sigma T_0^4 S$.

Finalement, le mur perd seulement par rayonnement la différence :

$$P_{ray} = \sigma(T_4 - T_0^4)S$$

soit numériquement :

$$\boldsymbol{P_{ray} \approx 0,5\ \mathrm{kW}}$$

Et finalement, c'est la convection qui prédomine.

Remarque : la différence de température étant faible, on peut linéariser par un développement au premier ordre en $T - T_0$, l'expression précédente en

$$P_{ray} \approx 4T_0^3(T - T_0)\sigma S$$

On voit ainsi en première approximation, que les deux causes de perte (convection et rayonnement) sont proportionnelles à la différence de température entre le mur et l'air extérieur.

EXERCICE 19 Rayonnement solaire et température de la Terre

On admet que le Soleil et la Terre rayonnent comme de corps noirs de températures T_S et T_T.

a) Déterminer la température à la surface du Soleil sachant que le maximum du spectre qu'il émet est situé à 520 nm. Quelle est alors la puissance P_S émise par le Soleil ?
b) En déduire la puissance $P_{reçue}$ par la Terre en provenance du Soleil.
Données : rayon terrestre : $R_T = 6370$ km ; rayon du Soleil : $R_S = 697\ 000$ km ; distance Terre-Soleil : $d = 144.10^6$ km.
c) Avec les hypothèses faites, quelle serait la température d'équilibre de la Terre ?
d) Ce modèle un peu grossier n'est pas réaliste ; en fait, la température moyenne de la Terre (15 °C) est supérieure à celle calculée. Quels sont les deux phénomènes les plus importants modifiant ce bilan ?

a) La loi de WIEN $\lambda_m T \approx 2900\ \mu\mathrm{m.K}$ donne la température

$$\boldsymbol{T_S = 5580\ \mathrm{K} \approx 5600\ \mathrm{K}}$$

La puissance émise par le Soleil est :

$$P_S = \sigma T_S^4 \times 4\pi R_S^2$$

soit

$$\boldsymbol{P_S = 3,4.10^{26}\ \mathrm{W}}$$

b) A une distance d, le rayonnement solaire entraine un flux ou puissance par unité de surface :

$$\varphi(d) = \frac{P_S}{4\pi d^2}$$

La Terre en intercepte une partie correspondant à un disque de surface πR_T^2 ; elle reçoit donc une puissance de la part du Soleil :

$$P_{reçue} = \varphi(d) \times \pi R_T^2 = P_S \frac{R_T^2}{4d^2}$$

Soit

$$\boldsymbol{P_{reçue} = 1,6.10^{17}\ \mathrm{W}}$$

ce qui correspond à une puissance d'environ $1{,}3\ \mathrm{kW}$ par m^2 en moyenne à la surface du sol terrestre.

c) La Terre, en équilibre thermique, doit réémettre, en régime permanent, toute la puissance qu'elle reçoit. Si on l'assimile à un corps noir,

$$P_T = \sigma T_T^4 \times 4\pi R_T^2 \equiv P_{reçue}$$

ce qui conduit à une température terrestre :

$$\boxed{\boldsymbol{T_T = T_S \left(\frac{R_S}{2d}\right)^{\frac{1}{2}}}}$$

Application numérique : $\boldsymbol{T_T = 275\ \mathrm{K} = 2\ °\mathrm{C}}$.
L'ordre de grandeur est correct, mais la valeur obtenue est un peu en deçà de la valeur moyenne constatée sur Terre.

d) L'erreur la plus grossière consiste à considérer que toute la puissance rayonnée par la Terre est perdue dans l'espace. C'est faux, car ce rayonnement centré sur l'infrarouge lointain est en partie absorbé et réfléchi par l'atmosphère terrestre (vers la Terre), et tout particulièrement par certains gaz qui y sont présents comme le dioxyde de carbone. C'est l'effet de serre bien connu des climatologues. Sa conséquence en est bien sûr une température de surface plus grande que celle prévue en c) (*cf*. EXERCICE $\mathbf{31}$). A noter que cet effet intervient beaucoup moins pour la puissance incidente en provenance du Soleil car l'atmosphère est davantage transparente dans le visible.

Un autre facteur important serait à prendre en compte le fait que les désintégrations radioactives dans le volume de la Terre libèrent un flux thermique et participent au bilan qui serait plutôt : $P_{reçue} + P_{radioactiv} = P_{sortante}$ où $P_{sortante}$ est la puissance rayonnée s'échappant de l'atmosphère vers l'espace.

Ces deux facteurs permettent de comprendre pourquoi la température de surface est plus importante que celle du modèle grossier présenté.

Partie 4 Questions de culture physique

QUESTION 20 Quelle différence essentielle existe-t-il entre le spectre émis par un atome excité (par exemple l'atome d'hydrogène) et le spectre émis par un corps noir ?

Le spectre émis par les atomes lors des transitions entre niveaux électroniques quantifiés sont des spectres de raies ; en TP d'optique sur le goniomètre, les lampes spectrales (qui émettent essentiellement dans le visible et l'ultraviolet) donnent sur fond noir un ensemble discret de raies de couleur différente. Alors que la caractéristique du rayonnement thermique est d'émettre un spectre continu (alors même que les niveaux des oscillations thermiques, source de ce rayonnement, sont quantifiés).

QUESTION 21 Quel lien existe-t-il entre le rayonnement électromagnétique et le rayonnement thermique ?

Toute particule chargée et accélérée rayonne une onde électromagnétique. C'est le cas ici des particules qui constituent le corps, mais du fait de leur mouvement désordonné lié à l'agitation thermique, elles ne rayonnent pas une onde progressive monochromatique, mais un rayonnement à large densité spectrale (on retrouve la question précédente).

QUESTION 22 Lorsqu'on chauffe un morceau de fer, il devient progressivement rouge sombre, puis rouge plus vif, et à plus haute température encore, « blanc » ; pourquoi ?

Plus la température augmente, plus la longueur d'onde λ_m du domaine spectral diminue d'après la loi de WIEN ; initialement dans l'infrarouge, elle se déplace vers le domaine visible rouge vers 500 °C, puis « blanc » vers 1200 °C.

QUESTION 23 La température à l'intérieur d'une voiture noire exposée en plein été au soleil atteint 65 °C, alors que la même voiture blanche n'atteint que 40 °C. Commenter ce résultat.

Pourquoi lorsque les voitures roulent, la température dans la voiture blanche sera très voisine de celle de l'air et celle dans la voiture noire dépassera de 10 °C environ la température de l'air extérieur ?

La carrosserie et en particulier le toit reçoit l'énergie solaire (essentiellement dans le visible et le proche infrarouge). Pour l'automobile noire, pratiquement la totalité de cette puissance est absorbée, alors que pour la voiture blanche, 25 % seulement est absorbé, le reste est réfléchi.

Les deux voitures émettent dans l'infrarouge (plutôt lointain) correspondant au rayonnement thermique. La voiture noire se comporte pratiquement comme un corps noir pour cette émission, et il en est de même pour la voiture blanche !

L'air environnant rayonne comme le ferait un corps noir : on suppose comme le ferait un corps noir dont la température est inférieure de 12 °C en dessous de la température de l'air mesurée sous abri. Les deux automobiles reçoivent donc de l'énergie de l'air. Par convection thermique de l'air, les deux automobiles perdent de l'énergie.

En régime permanent les flux reçus sont égaux aux flux émis.

En définitive, la différence essentielle vient de la diffusion (ou réflexion) de l'énergie solaire selon la couleur.

Lors les voitures roulent, on augmente considérablement les échanges conducto-convectifs entre l'air et la carrosserie. L'énergie solaire est pratiquement évacuée par la convection thermique, d'où la moindre différence de température entre les deux voitures.

QUESTION 24 L'efficacité des panneaux solaires comportant une circulation d'eau et celle des panneaux photovoltaïques est-elle la même en hiver qu'en été ? Dépend-elle du vent qui souffle ou non ?

En hiver le soleil est plus bas sur l'horizon et la surface des panneaux solaires reçoit moins d'énergie.

Le vent refroidit les panneaux à circulation d'eau, leur échauffement est moins important. Les panneaux photovoltaïques transforment directement l'énergie solaire incidente en énergie électrique, ils sont donc peu sensibles à leur refroidissement.

QUESTION 25 Lors d'une éclipse de Soleil, la température diminue rapidement (et la sensation de froid apparaît immédiatement). Expliquer.

La « sensation de chaud » que l'on peut ressentir à l'extérieur n'est pas toujours simplement corrélée à la température de l'air (mesurée au thermomètre et qui suppose l'équilibre thermique entre l'air et le thermomètre). Ainsi par vent on a, à cause de la convection, une sensation de fraîcheur avec une température ressentie qui est inférieure à celle de l'air. En plein soleil, à cause du rayonnement direct, la température ressentie est supérieure à cette de l'air (mesurée sous abri). Cela illustre la différence entre température cinétique et température de rayonnement.

QUESTION 26 Qu'est-ce qui permet à un serpent crotale de chasser par une nuit obscure ?

Les serpents de type crotale, mais aussi les boas ou pythons disposent de récepteurs sensibles à l'infrarouge, rayonnement (par chaleur) émis par les animaux à sang chaud. Ces serpents étant nocturnes, ils perçoivent par nuit noire le plus léger changement de température et donc la présence de petits rongeurs (en sommeil à ce moment-là), qui deviennent ainsi des proies faciles.

QUESTION 27 Qu'appelle-t-on lunettes à infrarouge ?

Le corps humain, à la température de 37 °C, émet également dans l'infrarouge un rayonnement dont la longueur d'onde est d'environ 10 μm et donc invisible aux yeux humains. Les lunettes à infrarouge (mises au point initialement par les militaires) permettent aux hommes d'apercevoir de nuit des êtres humains.

QUESTION 28 Quelle est une des applications au développement durable des caméras infrarouges ?

La thermographie IR permet à partir du survol d'une localité en hélicoptère de repérer à l'aide d'une « thermo-photo » traduite par une échelle de couleurs les habitations dont les pertes thermiques sont élevées, et le cas échéant, de proposer (grâce à un avantage fiscal) une meilleure isolation aux propriétaires concernés.

Partie 5 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 29 Exposition d'une plaque au Soleil

Une plaque carrée en aluminium, de côté $a = 10\ \mathrm{cm}$ et d'épaisseur $e = 5\ \mathrm{mm}$, est disposée dans un cadre isolant thermique. Seule une face est exposée aux rayons solaires. La plaque est horizontale et les rayons solaires font un angle $\theta = 45\ °$ avec la verticale du lieu. Le flux surfacique solaire incident est de $\varphi_S = 850\ \mathrm{W.m^{-2}}$.

a) Pourquoi peut-on admettre que la température T_p de la plaque est uniforme en régime permanent ?

La plaque diffuse (ou réfléchit) une fraction $\alpha = 30\ \%$ du flux solaire incident ; le reste est absorbé. Elle émet comme un corps noir à la température T_p.

L'air environnant est à la température T_a et émet comme un corps noir à cette température. Il existe par ailleurs des échanges convecto-conductifs entre l'air et la plaque donc le coefficient de NEWTON est h.

b) En régime permanent, donner une relation permettant de déterminer la température de la plaque.
Application numérique : calculer T_p sachant que $T_a = 300\ \mathrm{K}$, $h = 4{,}0\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}}$.

a) L'aluminium est un bon conducteur de la chaleur et l'épaisseur de la plaque est faible. On peut donc admettre que la température T_p de la plaque est uniforme.

b) La plaque est en équilibre thermique. La somme algébrique des flux énergétiques qu'elle reçoit est nulle.
Le flux solaire incident est unidirectionnel : $\Phi^i = S\cos\theta\,\varphi_S$ où $S\cos\theta$ est la surface projetée dans un plan perpendiculaire à la direction des rayons solaires.
Le flux diffusé (ou réfléchi) est $\Phi^r = \alpha\Phi^i$.
Le flux émis par la plaque est $\Phi^e = S\sigma T_p^4$.
Le flux incident reçu de la part de l'air est $\Phi^{air} = S\sigma T_a^4$.
Le flux conducto-convectif emporté par l'air : $\Phi_{cc} = Sh(T_p - T_a) > 0$.
Le bilan permet d'écrire : $\Phi^i + \Phi^{air} = \alpha\Phi^i + \Phi^e + \Phi_{cc}$ soit :

$$\boxed{\boldsymbol{(1-\alpha)\cos\theta\,\varphi_S = \sigma\left(T_p^4 - T_a^4\right) + h\left(T_p - T_a\right)}}$$

Remarque : dans cette écriture le coefficient $1-\alpha$ traduit la partie du flux solaire absorbé.
On peut admettre en première approximation que T_p est proche de T_a, alors

$$\left(T_p^4 - T_a^4\right) \approx 4T_a^3\left(T_p - T_a\right)$$

ce qui conduit à la température de la plaque :

$$\boxed{T_p \approx T_a + \frac{(1-\alpha)\cos\theta\,\varphi_S}{h + 4\sigma T_a^3}}$$

Application numérique : $\boxed{T_p \approx 342\ \mathrm{K}}$ (à noter qu'ici $\frac{4\sigma T_a^3}{h} = 1{,}53$, les pertes par rayonnement et par convection sont du même ordre de grandeur).

Ceci représente un écart relatif

$$\frac{T_p - T_a}{T_a} = \frac{42}{300} = 0{,}14$$

une valeur plus exacte est $T_p = 337$ K.

EXERCICE 30 Réchauffement d'une sphère

Une sphère métallique solide homogène de rayon r, de capacité thermique massique c et de masse volumique ρ est placée dans une enceinte vide dont les parois sont à la température T_0 constante. La conductivité thermique λ de la sphère est très grande. On peut admettre qu'à chaque instant la température de la sphère est uniforme et qu'elle se comporte comme un corps noir. Le volume de la sphère est faible par rapport au volume de l'enceinte.

A l'instant initial, la sphère est à une température uniforme $T_1 < T_0$.

a) Réaliser un bilan de l'énergie transférée à cette sphère.
b) Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(t)$ de la sphère.
c) En posant $\theta = \frac{T}{T_0}$ et $x = \frac{t}{\tau}$ où τ est une durée caractéristique à déterminer, écrire une équation différentielle adimensionnée en $\theta(x)$.
   Application numérique : calculer τ pour une bille d'acier avec $r = 1{,}0$ cm, $\rho = 7{,}9.10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$, $c = 0{,}45\ \mathrm{kJ.kg^{-1}.K^{-1}}$, $T_0 = 373$ K, $\sigma = 5{,}67.10^{-8}\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-4}}$.
d) On admet que $\theta = 1 - \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$. Linéariser l'équation différentielle, puis la résoudre en donnant $T(t)$. Quelle est la signification de la constante τ ?
e) En fait, le solide ne se réchauffe pas dans le vide, mais dans l'air de température T_0. On suppose que l'air est transparent pour le rayonnement, et qu'il existe des échanges conducto-convectifs entre la sphère et l'air tels que : $\varphi_{cc} = h\left(T_{surface} - T_0\right)$ en $\mathrm{W.m^{-2}}$.
   Etablir comme à la question b) l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$.
   Avec $h = 1{,}0\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}}$, pour quel domaine de température le rayonnement est-il prépondérant ?
   La durée de réchauffement est-elle sensiblement modifiée ?

a) La sphère émet comme un corps noir à la température T. Le flux surfacique émis étant $\varphi^e = \sigma T^4$, elle émet un flux global $\Phi^e = \varphi^e S$ avec $S = 4\pi r^2$. Le rayonnement dans la cavité est en équilibre thermique à la température T_0. Ce rayonnement n'est pas perturbé par la présence de la sphère compte tenu de ses dimensions, le flux surfacique incident est donc $\varphi^i = \sigma T_0^4$ et le flux incident global est $\Phi^i = \varphi^i S$.

Entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, le transfert thermique reçu par la sphère est donc :

$$\delta Q = \left(\Phi^i - \Phi^e\right)\mathrm{d}t$$

soit

$$\boxed{\boldsymbol{\delta Q = S\sigma\left(T_0^4 - T^4\right)\mathrm{d}t}}$$

b) La température de la sphère passe alors de la température T à la température $T + \mathrm{d}T$ (ces températures sont uniformes sur le volume de la sphère). La variation d'énergie interne de la sphère est

$$\mathrm{d}U = \rho c V \mathrm{d}T$$

avec

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

le volume de la sphère.

Le premier principe de la thermodynamique appliqué à la sphère s'écrit, en l'absence du travail :

$\mathrm{d}U = \delta Q$

soit

$$\rho c V \mathrm{d}T = S\sigma(T_0^4 - T^4)\mathrm{d}t$$

et finalement :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{3\sigma}{\rho c r}\left(T_0^4 - T^4\right)}}$$

c) Avec $\theta = \frac{T}{T_0}$ et $x = \frac{t}{\tau}$, on obtient $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{3\sigma\tau T_0^3}{\rho c r}(1 - \theta^4)$ conduisant à l'équation adimensionnée réduite

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} = \mathbf{1} - \boldsymbol{\theta}^4}$$

après avoir posé

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{\rho c r}}{\mathbf{3}\boldsymbol{\sigma T_0^3}}}$$

Application numérique : $\boldsymbol{\tau} \approx \mathbf{4030\ s}$ ou $\boldsymbol{\tau} \approx \mathbf{1\ h\ 7\ min}$.

d) Avec $\theta = 1 - \varepsilon$, on a $\theta^4 \approx 1 - 4\varepsilon$, et l'équation différentielle précédente devient :

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\varepsilon} = -4\mathrm{d}x$$

qui s'intègre en

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(0)e^{-4x}$$

or à $t = 0$, soit $x = 0$, $\varepsilon(0) = 1 - \theta(0) = 1 - \frac{T_1}{T_0}$, et finalement en variables $T(t)$:

$$\boxed{\boldsymbol{T(t) = T_0 - (T_0 - T_1)\,\mathbf{exp}\left(-\frac{4t}{\tau}\right)}}$$

Il apparaît qu'au bout de la durée τ, la température de la sphère est quasiment égale à la température T_0 de l'enceinte (et ceci quelle que soit sa température initiale T_1, pourvu qu'elle soit proche de T_0).

Application numérique : pour $t = \tau$, on a $(T(\tau) - T_0) = 0{,}018(T_1 - T_0)$, l'écart de température entre la sphère et l'enceinte s'est réduit de 98 %.

e) Il faut rajouter dans le bilan énergétique l'énergie perdue par le flux conducto-convectif :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho c \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2\left[\sigma\left(T_0^4 - T^4\right) + h(T_0 - T)\right]$$

en effet la sphère étant plus froide que l'air elle en reçoit un flux positif.

Le rayonnement est prépondérant si $\sigma\left(T_0^4 - T^4\right) > h(T_0 - T_1)$.

Pour T proche de T_0, il suffit d'écrire :

$$T_0^4 - T^4 = (T_0^2 - T^2)(T_0^2 + T^2) = (T_0 - T)(T_0 + T)(T_0^2 + T^2) \approx 4T_0^3(T_0 - T)$$

Alors la condition $\sigma\left(T_0^4 - T^4\right) > h(T_0 - T_1)$ se réécrit en $\frac{4\sigma T_0^3}{h} \approx 12 > 1$.
Le rayonnement est 12 fois plus important que la convection au voisinage de T_0 et donc la durée du réchauffement est légèrement plus faible.

Remarque : l'équation linéarisée de la question d) s'écrit alors

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\varepsilon} = -4\left(1 + \frac{h}{4\sigma T_0^3}\right)\mathrm{d}x$$

EXERCICE 31 Rôle thermique de l'atmosphère terrestre : effet de serre

On admet que le Soleil et la Terre rayonnent comme des corps noirs sphériques.

Données : température du Soleil : $T_S = 5600$ K ; rayon terrestre : $R_T = 6370$ km ; rayon du Soleil : $R_S = 697\,000$ km ; distance Terre-Soleil : $d = 144.10^6$ km.

La température $T_{0T} = T_S\left(\frac{R_S}{2d}\right)^{\frac{1}{2}}$ est la température que devrait avoir la Terre si l'atmosphère n'existait pas (*cf.* EXERCICE **19**).

On tient compte, dans ce problème, de l'atmosphère terrestre qui constitue un écran d'épaisseur faible par rapport au rayon terrestre. Le modèle simplifié utilise les hypothèses suivantes :

- l'atmosphère rayonne la fraction β de l'énergie que rayonnerait un corps noir de température T_a,
- l'atmosphère absorbe une fraction α et la Terre une fraction $1 - \alpha$ du rayonnement solaire,
- la Terre absorbe la totalité du rayonnement de l'atmosphère vers la Terre et l'atmosphère absorbe une fraction β du rayonnement terrestre.

Soit T_T la température d'équilibre thermique de la Terre dans ces conditions.

a) Ecrire les bilans thermiques avec les températures T_S, T_a et T_T.
b) Introduire T_{0T} en en déduire les expressions littérales de T_a et T_T en fonction de T_{0T}, α et β.
Application numérique : des mesures conduisent à prendre $\alpha = 0{,}5$ et $\beta = 0{,}9$; déterminer numériquement T_a et T_T, et comparer T_T et $T_{0T} = 275$ K.
c) Calculer les longueurs d'onde caractéristiques λ_a et λ_T du rayonnement thermique émis par l'atmosphère et la Terre.
d) Pourquoi α et β sont-ils différents ?

a) Effectuons des bilans thermiques pour l'atmosphère et la Terre sur la base des raisonnements de l'EXERCICE 19.

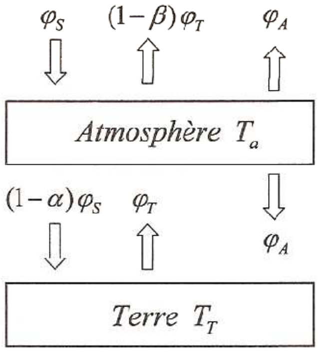

FIGURE 2

– Bilan pour l'atmosphère qui reçoit une fraction α du rayonnement solaire, une fraction β du rayonnement de la Terre, et qui, elle rayonne dans les deux sens (vers la Terre et l'extérieur) dans une proportion β :

$$\alpha\sigma T_S^4 \times 4\pi R_S^2 \times \frac{\pi R_T^2}{4\pi d^2} + \beta\sigma T_T^4 \times 4\pi R_T^2 = 2\beta\sigma T_a^4 \times 4\pi R_T^2$$

– Bilan pour la Terre qui reçoit une fraction $1-\alpha$ du rayonnement solaire, le rayonnement de l'atmosphère (en proportion β), et qui, à son tour, rayonne :

$$(1-\alpha)\sigma T_S^4 \times 4\pi R_S^2 \times \frac{\pi R_T^2}{4\pi d^2} + \beta\sigma T_a^4 \times 4\pi R_T^2 = \sigma T_T^4 \times 4\pi R_T^2$$

b) Des équations précédentes, après simplification, on élimine T_S à l'aide de $T_{0T} = T_S\left(\frac{R_S}{2d}\right)^{\frac{1}{2}}$. On obtient les relations suivantes :

$$\alpha T_{0T}^4 + \beta T_T^4 = 2\beta T_a^4$$

$$(1-\alpha)T_{0T}^4 + \beta T_a^4 = T_T^4$$

La résolution est facile et conduit aux expressions :

$$\boxed{\boldsymbol{T_T = \left(\frac{2-\alpha}{2-\beta}\right)^{\frac{1}{4}} T_{0T}}}$$

et

$$\boxed{\boldsymbol{T_a = \left(\frac{\alpha+(1-\alpha)\beta}{\beta(2-\beta)}\right)^{\frac{1}{4}} T_{0T}}}$$

Application numérique : $\boldsymbol{T_T = 297\ \mathrm{K} = 24\ °\mathrm{C}}$ et $\boldsymbol{T_a = 272\ \mathrm{K} = -1\ °\mathrm{C}}$.

On note que $T_T > T_{0T}$, la présence de l'atmosphère a pour effet d'augmenter la température moyenne de la Terre.

c) Les longueurs d'onde sont données par la loi de WIEN $\lambda_m T \approx 2\,900\ \mu\mathrm{m.K}$:

$$\boldsymbol{\lambda_a = 10,7\ \mu\mathrm{m}} \text{ et } \boldsymbol{\lambda_T = 9,8\ \mu\mathrm{m}}$$

Ces longueurs d'onde sont dans l'infrarouge.

d) L'absorption de l'atmosphère est sélective en fonction de la longueur d'onde λ ; elle est plus importante pour l'infrarouge que pour le visible d'où les coefficients α et β différents.

EXERCICE 32 Pression de radiation et entropie de rayonnement

Sur les parois intérieures d'un corps noir à l'équilibre thermique, il y a le même nombre de photons absorbés et émis dans chaque direction θ par rapport à la normale $\vec{n}$ à la surface en ce point.

a) Faire un schéma, et montrer que tout se passe pour le corps noir, du point de vue de la quantité de mouvement échangée avec le rayonnement comme si les photons se réfléchissaient sur la surface du corps noir.

b) On rappelle que la quantité de mouvement d'un photon est $\vec{p} = \frac{h\nu}{c}\vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de la direction du photon, ν la fréquence du rayonnement, et c la vitesse de la lumière dans le vide. Calculer pour un photon qui « se réfléchit » en incidence normale sur la surface du corps noir dont la normale extérieure est dirigée par $\vec{n}$ la quantité de mouvement transférée au corps noir.

c) Soit u_{em} la densité volumique d'énergie électromagnétique dans l'enceinte du corps noir. On utilise un modèle simple où un tiers des photons de l'enceinte voyage suivant la direction x, un tiers suivant y, et un tiers suivant z. Dans chacune de ces trois directions, la moitié des photons progresse dans un sens, et l'autre moitié dans l'autre sens. Calculer en fonction de u_e le nombre de photons d^2N arrivant sur une surface $\mathrm{d}\Sigma$ d'enceinte perpendiculaire à x, pendant le temps $\mathrm{d}t$, et la quantité de mouvement transférée à $\mathrm{d}\Sigma$ par ces photons.

d) En déduire, en utilisant le principe fondamental de la dynamique la force moyenne exercée par le rayonnement sur $\mathrm{d}\Sigma$, et la *pression de radiation* P_r (force normale par unité de surface) qui s'exerce sur l'enceinte en chaque point : $P_r = \frac{u_{em}}{3}$.

e) Sachant que le flux surfacique émis par un corps noir φ_{CN}^e est lié à la densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em} par la relation $\varphi_{CN}^e = \frac{u_{em}c}{4}$, trouver, en utilisant la loi de STEFAN, l'équation d'état du rayonnement (assimilé à un gaz de photons), c'est-à-dire la relation entre P_r et T, température d'équilibre du corps noir avec le rayonnement (il y intervient également σ, la constante de STEFAN).

f) Soit V le volume constant de la cavité où se trouve le rayonnement en équilibre avec le corps noir. Calculer la variation d'énergie interne $\mathrm{d}U$ de ce volume pour une variation de température $\mathrm{d}T$, en fonction de V, σ, c et T.
En déduire sa variation d'entropie $\mathrm{d}S$, puis l'entropie totale du rayonnement S, sachant que $S = 0$ à $T = 0$ K.

g) Application : on considère un modèle cosmologique d'univers, quasi homogène à la température de rayonnement T, isolé, sphérique de rayon R augmentant avec le temps, et évoluant de manière isentropique. Montrer que l'expansion de l'univers s'accompagne d'une diminution de sa température de rayonnement suivant la loi $TR = cte$.

a) En chaque point de la paroi, des photons sont rayonnés dans toutes les directions possibles. A l'équilibre, le nombre de photons absorbés dans un intervalle de temps donné est égal au nombre de photons réémis, et ce, pour toutes les fréquences. Pour chaque photon absorbé, on peut donc trouver un photon de même fréquence réémis symétriquement (voir FIGURE 3). Du point de vue de la quantité de mouvement, tout se passe comme si chaque photon de l'enceinte absorbé se réfléchissait sur la paroi du corps noir.

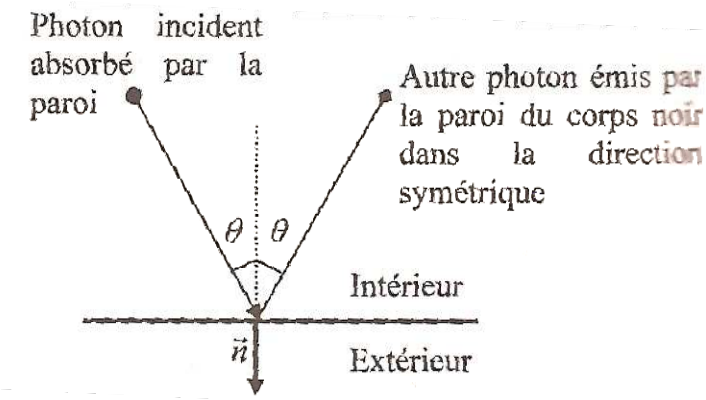

FIGURE 3

b) En incidence normale, la quantité de mouvement du photon incident est $\vec{p}_i = \frac{h\nu}{c}\vec{n}$ et celle du photon « réfléchi » $\vec{p}_r = -\frac{h\nu}{c}\vec{n}$. La variation de quantité de mouvement du photon est donc au cours de la « réflexion » : $\Delta\vec{p} = \vec{p}_r - \vec{p}_i = -2\frac{h\nu}{c}\vec{n}$.
La quantité de mouvement totale du système isolé « paroi + photon » se conservant au cours de cette réflexion, la variation de quantité de mouvement de la paroi est donc :

$$\boxed{\Delta\vec{p}_1 = 2\frac{h\nu}{c}\vec{n}}$$

c) On considère les d^2N photons de fréquence ν se déplaçant vers la paroi d'aire $\mathrm{d}\Sigma$ à la vitesse c ; pendant le temps $\mathrm{d}t$, ils parcourent la distance $c\mathrm{d}t$ et transportent chacun l'énergie $h\nu$. Les photons « qui se réfléchissent » sur la paroi pendant $\mathrm{d}t$ sont donc contenus dans le volume $\mathrm{d}^2V = c\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}\Sigma$ et leur énergie totale vaut : $\mathrm{d}^2N\ h\nu$.

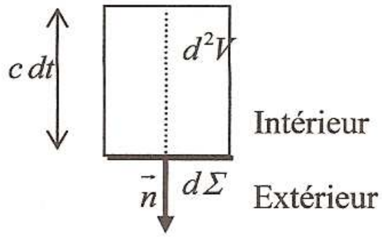

FIGURE 4

L'énergie électromagnétique contenue dans ce volume d^2V vaut (par définition de u_{em}) $u_e\mathrm{d}^2V$, et celle des photons se dirigeant vers la paroi $\frac{u_{em}\mathrm{d}^2V}{6}$ (un sixième de tous les photons du volume a la direction et le sens corrects).

On en déduit : $\mathrm{d}^2N\ h\nu = \frac{u_{em}\mathrm{d}^2V}{6}$ d'où

$$\boxed{\mathrm{d}^2N = \frac{1}{6h\nu}u_{em}c\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}\Sigma}$$

La quantité de mouvement transférée à la paroi pendant $\mathrm{d}t$ est donc :

$$\mathrm{d}^2\vec{p} = \mathrm{d}^2N\ \Delta\vec{p}_1$$

soit après substitution :

$$\boxed{\mathrm{d}^2\vec{p} = \frac{1}{3}u_{em}\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}\Sigma\ \vec{n}}$$

d) Par la relation fondamentale (ou théorème de la résultante cinétique) appliquée à la paroi, la force exercée sur la paroi est :

$$\mathrm{d}\vec{F} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}u_{em}\ \mathrm{d}\Sigma\ \vec{n}$$

Et finalement la force normale par unité de surface (ou pression) :

$$P_r = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}\Sigma}\right|$$

soit

$$\boxed{\boldsymbol{P_r = \frac{u_{em}}{3}}}$$

La pression de radiation est dirigée vers l'extérieur, le rayonnement tendant à faire « exploser » la paroi du corps noir vers l'extérieur (on trouverait le même résultat par réflexion sur une paroi métallique).

Remarque : le résultat exact, tenant compte de toutes les directions possibles des photons est en fait le même que celui résultant de ce modèle simple à trois directions.

e) La relation (qu'il n'est pas demandé d'établir) $\varphi_{CN}^{e} = \frac{u_{em}c}{4}$ dans l'enceinte du corps noir, ainsi que la loi de STEFAN $\varphi_{CN}^{e} = \sigma T^4$, conduisent à :

$$u_{em} = \frac{4\sigma T^4}{c}$$

d'où l'on déduit :

$$\boxed{\boldsymbol{P_r = \frac{4\sigma T^4}{3c}}}$$

f) Dans le volume V où la densité volumique d'énergie électromagnétique est uniforme, l'énergie interne du rayonnement est simplement le produit du volume par la densité volumique d'énergie : $U = u_{em}V = \frac{4\sigma T^4}{c}V$.

Pour une variation $\mathrm{d}T$ de la température T à volume constant, la variation d'énergie interne du rayonnement est donc $\mathrm{d}U = \frac{16\sigma T^3}{c}V\mathrm{d}T$.

L'identité thermodynamique $\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V$ donne, en l'absence de variation de volume :

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}U}{T} = \frac{16\sigma V T^3}{3c}$$

On en déduit, la constante d'intégration étant nulle :

$$\boxed{S = \frac{16\sigma V T^3}{3c}}$$

C'est l'entropie du rayonnement dans un volume V en équilibre avec un corps noir à la température T.

g) Pour une sphère, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ et donc, $S = \frac{64\pi\sigma T^3 R^3}{9c}$.
L'univers est un système « isolé » dont on suppose l'évolution réversible, donc isentropique ; une évolution à $S = cte$ implique donc $T^3R^3 = cte$ soit

$$\boxed{TR = cte}$$

Ainsi, l'univers en expansion (R augmeente) voit-il dans ce modèle d'entropie constante la température du rayonnement décroître.
Le rayonnement cosmique « fossile » uniforme et isotrope qui résulte des débuts très chauds de l'univers est maintenant mesuré à une température de $2{,}7\ \mathrm{K}$ dans le domaine des ondes radio. Découvert fortuitement en 1963 par Penzias et Wilson (prix Nobel), il constitue la preuve la plus solide du « big bang », théorie suivant laquelle l'univers est né très comprimé dans une « singularité » avant d'entamer son expansion.
C'est le seul rayonnement de corps noir qu'on trouve dans la nature. Ce caractère de corps noir montre que les conditions nécessaires à la réalisation de l'équilibre thermodynamique rayonnement-matière régnaient dans l'univers primordial dont il est issu. Dans un tel état d'équilibre (qui n'est plus établi aujourd'hui), le rayonnement est entièrement défini par un seul paramètre, sa température.

❖ ❖ ❖