Epreuve de Mathématiques

Durée 4 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies

Exercice 1 (3 *points*)

1. Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$, pour tout entier naturel n.
   (a) Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.
   (b) Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.
   (c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = w_n$.
2. Soit v la suite de terme général v_n défini sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   (a) Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.
   (b) Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par : $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.
   Exprimer S_n en fonction de n.
   Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 (5 *points*). *Non spécialité*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(0; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. On désigne par A, B et I les points d'affixes respectives $z_A = 3 + 2i$; $z_B = -3$; $z_I = 1 - 2i$.
   (a) Faire une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.
   (b) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z = \dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$. Que peut-on en déduire pour la nature du triangle IAB ?
   (c) Calculer l'affixe z_C du point C image de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2.
   (d) Soit D le barycentre du système {(A, 1) ; (B, –1) ; (C, 1)}, calculer l'affixe z_D du point D.
   (e) Montrer que ABCD est un carré.
2. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$.
3. On considère l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}$.
   (a) Montrer que $B \in \Gamma_2$.
   (b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2.

Exercice 2 (5 *points*). Spécialité

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$x_0 = 3$ et $x_{n+1} = 2x_n - 1$.

$y_0 = 1$ et $y_{n+1} = 2y_n + 3$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.
2.
   (a) Calculer le PGCD de x_3 et x_4 puis celui de x_{2002} et x_{2003}. Que peut-on dire de x_3 et x_4 d'une part, de x_{2002} et x_{2003} d'autre part ?

   (b) x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?
3.
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.

   (b) Exprimer y_n en fonction de n.

   (c) En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p, le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

   (d) On note d_n le PGCD de x_n et y_n pour tout entier naturel n. Démontrer que l'on a : $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Exercice 3 (4 *points*)

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est $p([0;t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$.

Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0;200[) = 0{,}5$.

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.
2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale au centième près.
3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}dx$.

   (a) Montrer que $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}dx = \dfrac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

   (b) En déduire d_m ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

Exercice 4 (6 *points*)

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}$.

(a) Démontrer que $f(x)=\dfrac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$.
(b) Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
(c) Etudier les variations de la fonction f.

PARTIE B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée g(t). On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour g(t) est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, de l'équation différentielle : (E_1) $y'=\dfrac{y}{4}$.
   (a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).
   (b) Déterminer l'expression de g(t) lorsque, à la date t = 0, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire g(0) = 1.
   (c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?
2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note u(t) le nombre de rongeurs vivant au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions : (E_2) : $u'(t)=\dfrac{u(t)}{4}-\dfrac{[u(t)]^2}{12}$ et u(0) = 1 pour tout nombre réel t positif ou nul où u′ désigne la fonction dérivée de la fonction u.
   (a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a u(t) > 0. On considère, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction h définie par $h=\dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions : (E_3) : $h'(t)=-\dfrac{1}{4}h(t)+\dfrac{1}{12}$ et h(0) = 1 pour tout nombre réel t positif ou nul où h′ désigne la fonction dérivée de la fonction h.
   (b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y'=-\dfrac{1}{4}y+\dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.
   (c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

Exercice 5 (2 *points*)

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;
(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$;
(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante : « Deux suites adjacentes sont convergentes et elles sont la même limite ».