Propriété : caractérisation barycentrique

On considère deux points A et B distincts.
La droite (AB) est l'ensemble de tous les barycentres de tous les systèmes de points pondérés $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ avec α et β réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$.

Preuve :

- Soit M un point de (AB).
  Alors il existe k réel tel que $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB}$.

  i.e. $-\overrightarrow{MA} = k(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})$

  i.e. $-\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

  i.e. $(k-1)\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

  $k-1-k \neq 0$ donc M est le barycentre de $\{(A;k-1);(B;-k)\}$

- Soit M le barycentre de $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ avec $\alpha+\beta=0$
  alors $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

  i.e. $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

  i.e. $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MA} = -\beta\overrightarrow{AB}$

  i.e. $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ car $\alpha+\beta=0$

  donc $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc $M \in (AB)$.

Propriété : caractérisation barycentrique d'un segment.
On considère A et B deux points distincts. Le segment [AB] est l'ensemble de tous les barycentres de tous les systèmes de points pondérés $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ avec $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha+\beta \neq 0$.