Preuve

• Si M est un point de $[AB]$ alors $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

avec $0 \leq k \leq 1$.

Comme dans la preuve précédente, on a :

$(k-1)\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$

ie $(1-k)\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$

$1-k+k \neq 0$ donc M est le barycentre de $\{(A;1-k)(B,k)\}$

avec $1-k \geq 0$ et $k \geq 0$.

• Si M est le barycentre de $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ avec $\alpha \geq 0$; $\beta \geq 0$ et $\alpha+\beta \neq 0$.

On retrouve $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ avec $0 \leq \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \leq 1$,

donc M est sur $[AB]$

Remarque :

Les barycentres des systèmes $\{(A;\alpha),(B,\beta)\}$ avec $\alpha \leq 0$; $\beta \leq 0$ et $\alpha+\beta \neq 0$ sont aussi des points de $[AB]$.

II. Plans de l'espace.

Propriété : caractérisation barycentrique d'un plan

On considère A, B et C des points non alignés de l'espace.

Le plan ABC, c'est l'ensemble de tous les barycentres des systèmes $\{(A;\alpha),(B,\beta),(C;\gamma)\}$ avec α,β,γ réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.

Preuve :

• Si M est un point du plan (ABC) alors en considérant le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$: $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

ssi $\overrightarrow{AM} = a(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}) + b(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})$