ssi $\overrightarrow{AM} = (a+b)\overrightarrow{AM} + a\overrightarrow{MB} + b\overrightarrow{MC}$

ssi $(1-a-b)\overrightarrow{MA} + a\overrightarrow{MB} + b\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

$1-a-b+a+b = 1 \neq 0$ donc M est le barycentre de $\{(A; 1-a-b), (B; a), (C; b)\}$

- Si M est le barycentre de $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$

avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

alors $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

i.e $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{MA} + \gamma \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

i.e $(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MA} = -\beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}$

i.e $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$ car $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$

donc M appartient au plan (ABC).

Propriété : caractérisation barycentrique d'un triangle.

On considère A, B et C trois points non alignés.

L'intérieur du triangle ABC est l'ensemble des barycentres de tous les systèmes de points pondérés $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ avec $\alpha \geq 0$; $\beta \geq 0$; $\gamma \geq 0$, $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

Preuve :

- Soit M le barycentre de $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ avec $\alpha \geq 0$; $\beta \geq 0$; $\gamma \geq 0$, $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

On peut supposer que $\alpha + \beta \neq 0$ (sinon on peut prendre $\alpha + \gamma \neq 0$ ou $\beta + \gamma \neq 0$).

Alors on note C' le barycentre de $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$