
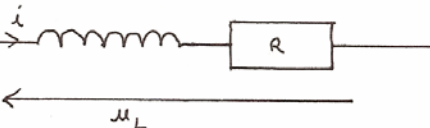


Etude du dipôle R-L

La bobine :

Symbole :

- bobine idéale : 
- bobine réelle : 

Caractéristiques :

l'inductance L exprimée en Henry (H)
généralement : $1 \text{ mH} < L < 1 \text{ H}$

Influence :

la bobine crée un retard à l'établissement du courant dans le circuit.

2 régimes de fonctionnement :

- le régime transitoire.
- le régime permanent.

Tension :

La tension aux bornes de la bobine est donnée par la relation :

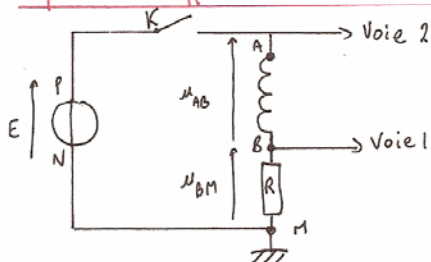
$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} \rightarrow \text{pour une bobine idéale.}$$

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} + r_i \rightarrow \text{pour une bobine réelle.}$$

Etablissement du courant dans une bobine :

• Equation différentielle d'évolution de i

Régime transitoire.



D'après la loi d'additivité des tensions :

$$E = u_{AB} + u_{BM}$$

par définition $u_{AB} = L \frac{di}{dt} + r_i$

et $u_{BM} = R_i$ d'après l'orientation du circuit.

Donc $E = L \frac{di}{dt} + r_i + R_i$

$$E = L \frac{di}{dt} + (r + R) i \rightarrow \text{équation différentielle d'évolution de } i$$

Régime permanent

i devient constante donc $\frac{di}{dt} = 0$.

l'équation différentielle devient $E = (R+r) \cdot I$

l'intensité du courant en régime permanent est $I = \frac{E}{R+r}$

● Solution de l'équation différentielle

Solution de la forme $i = A + B e^{kt}$

$$E = L \frac{d(A + B e^{kt})}{dt} + (R+r)(A + B e^{kt})$$

$$E = L \cdot B k e^{kt} + (R+r)(A + B e^{kt})$$

$$E = L B k e^{kt} + A(R+r) + B e^{kt}(R+r)$$

$$E = B e^{kt} (Lk + R+r) + A(R+r)$$

$$E - A(R+r) = B e^{kt} (Lk + R+r)$$

Cette équation étant vérifiée à toutes les dates:

$$\text{alors } E - (R+r)A = 0 \quad \text{et } Lk + (R+r) = 0$$

$$\text{d'où } A = \frac{E}{R+r} = I \quad \text{et } k = -\frac{R+r}{L} \quad \text{or } \tau = \frac{L}{R+r} \quad \text{donc } k = -\frac{1}{\tau}$$

$$\text{Donc } i = I + B e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Pour déterminer B , on utilise les conditions initiales: $i(0) = 0$

$i(0) = I + B e^0 = I + B \Rightarrow$ en accordant théorie et expérience, on a $I + B = 0$ d'où $B = -I$.

$i = I - I e^{-\frac{t}{\tau}} \quad i = I (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \Rightarrow$ solution de l'équation différentielle d'évolution de I

Expression de la tension aux bornes de la bobine

par définition: $u_L = L \frac{di}{dt} + r i$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} (I (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})) = I \frac{d}{dt} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{I}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{d'où } u_L = L \cdot \frac{I}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + r I (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$u_L = (R+r) I \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + r I - r I \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{donc } u_L = r I + R I \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

En régime permanent, la bobine se comporte comme un conducteur ohmique de résistance r .

Courbes $i(t)$ et $u_L(t)$:



Rupture du courant dans la bobine

Lors de l'ouverture du circuit, la bobine s'oppose à la rupture du courant dans le circuit :



Étincelle de rupture.

ouverture subite : étincelle.

l'intensité passe de 1A à 0A pendant $\Delta t = 1 \text{ ms}$, bobine idéale = $L = 1 \text{ H}$.

$$u_L = L \frac{di}{dt} \approx L \frac{\Delta i}{\Delta t} = 1 \times \frac{(-1)}{10^{-3}} = -10^3 \text{ V}$$

⇒ il apparaît donc une surtension aux bornes de la bobine, étincelle à l'interrupteur pour rétablir la continuité du courant dans le circuit.
Partage des e^- dans l'air (éclair par l'ionisation de l'air).

• Equation différentielle d'évolution de i

D'après la loi d'additivité des tensions : $u_L + u_R = 0$

Par définition : $u_L = L \frac{di}{dt} + Ri$ et $u_R = Ri$ donc $L \frac{di}{dt} + Ri + Ri = 0$

$$L \frac{di}{dt} + (R+R)i = 0.$$

• Solution générale de l'équation différentielle

Solution de la forme $i = A + Be^{kt}$

$$\begin{aligned} & L \frac{d(A + Be^{kt})}{dt} + (R+R)(A + Be^{kt}) \\ &= BL \frac{de^{kt}}{dt} + (R+R)A + (R+R)Be^{kt} \\ &= kBL e^{kt} + (R+R)A + (R+R)Be^{kt} \\ & kBL e^{kt} + (R+R)Be^{kt} = -(R+R)A \\ & Be^{kt}(kL + R+R) = -(R+R)A \end{aligned}$$

Cette équation est vérifiée à toutes les dates.

$$A(R+R) = 0 \quad \text{et} \quad Lk + R + R = 0 \quad \text{car} \quad B \neq 0 \quad \text{et} \quad e^{kt} > 0$$

$$\text{et} \quad k = -\frac{R+R}{L} = -\frac{1}{\tau}$$

La solution générale est de la forme $i = B e^{-\frac{t}{\tau}}$

D'après les conditions initiales, à $t=0$ $\Rightarrow i = I$, le courant est établi dans le circuit (régime permanent)

$$\text{donc} \quad i(0) = B e^0 = B = I \quad \text{donc} \quad i = I e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Expression de la tension aux bornes de la bobine :

$$u_L = L \frac{di}{dt} + Ri$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{I}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{I(R+R)}{L} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

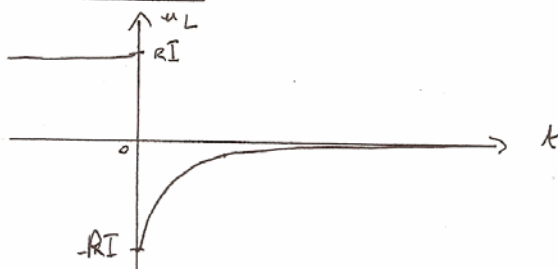
$$\text{Donc} \quad u_L = L \left(-\frac{I(R+R)}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + R I e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_L = -I R e^{-\frac{t}{\tau}} - R I e^{-\frac{t}{\tau}} + R I e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_L = -R \cdot I e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Lors de l'ouverture du circuit, il y a discontinuité de u_L avec apparition d'une surtension aux bornes de la bobine.

Courbe $u_L(t)$:



Aspect énergétique

La bobine stocke de l'énergie magnétique. À l'ouverture du circuit, l'énergie emmagasinée par la bobine est fournie au circuit.

$$E_m = \frac{1}{2} L i^2$$

E_m : en J \rightarrow énergie magnétique stockée par la bobine,

L : en H \rightarrow inductance de la bobine.

i : en A \rightarrow intensité du courant dans le circuit.