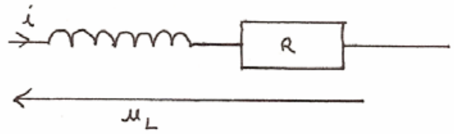
# Etude du dipôle R-L

## La bobine :

### Symbole :

- bobine idéale :


- bobine réelle :




### Caractéristiques :

l'inductance L exprimée en Henry (H)
généralement : $1 \text{ mH} < L < 1 \text{ H}$

### Influence :

la bobine crée un retard à l'établissement du courant dans le circuit.
2 Régimes de fonctionnement :

- le régime transitoire.
- le régime permanent.

### Tension :

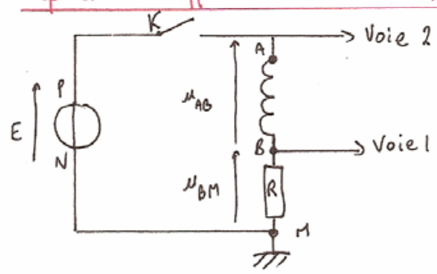
La tension aux bornes de la bobine et donnée par la relation :

$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$ → pour une bobine idéale.

$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} + ri$ → pour une bobine réelle.

## Etablissement du courant dans une bobine.

### Equation différentielle d'évolution de i




Régime transitoire.

D'après la loi d'additivité des tensions :

$E = U_{AB} + U_{BM}$

Par définition $u_{AB} = L \frac{di}{dt} + ri$

et $u_{BM} = Ri$ d'après l'orientation du circuit.

Donc $E = L \frac{di}{dt} + ri + Ri$

$E = L \frac{di}{dt} + (r+R)\, i$ → équation différentielle d'évolution de i

Régime permanent

$i$ devient constante donc $\frac{di}{dt} = 0$.

l'équation différentielle devient $E = (r+R) \cdot I$

l'intensité du courant en régime permanent est $I = \frac{E}{r+R}$

- Solution de l'équation différentielle

Solution de la forme $i = A + B e^{kt}$

$$E = L \frac{d(A + Be^{kt})}{dt} + (r+R)(A + Be^{kt})$$

$$E = L \cdot Bk e^{kt} + (r+R)(A + Be^{kt})$$

$$E = LBke^{kt} + A(r+R) + Be^{kt}(r+R)$$

$$E = Be^{kt}(Lk + R + r) + A(r+R)$$

$$E - A(r+R) = Be^{kt}(Lk + r + R)$$

Cette équation étant vérifiée à toutes les dates :

alors $E - (r+R)A = 0$ et $Lk + (R+r) = 0$

d'où $A = \frac{E}{r+R} = I$ et $k = -\frac{r+R}{L}$ or $\tau = \frac{L}{R+r}$ donc $k = \frac{1}{\tau}$

Donc $i = I + B e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Pour déterminer $B$, on utilise les conditions initiales : $i(0) = 0$

$i(0) = I + Be^{0} = I + B$ $\Rightarrow$ en accordant théorie et expérience, on a $I + B = 0$ d'où $B = -I$.

$i = I - I e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\quad i = I\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ $\Rightarrow$ solution de l'équation différentielle d'évolution de $I$

Expression de la tension aux bornes de la bobine

par définition : $u_L = L \frac{di}{dt} + ri$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right) = I \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{I}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

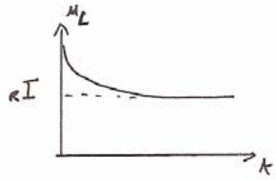
d'où $u_L = L \cdot \frac{I}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + rI\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

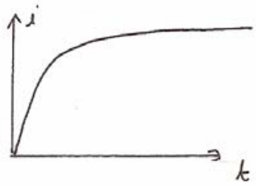
$$u_L = (r+R) I \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + rI - rI \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

donc $u_L = rI + RI \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

En régime permanent, la bobine se comporte comme un conducteur ohmique de résistance $r$.

Courbes $i(t)$ et $u_L(t)$ :




## Rupture du courant dans la bobine

Lors de l'ouverture du circuit, la bobine s'oppose à la rupture du courant dans le circuit :


Etincelle de rupture.

ouverture subite : étincelle.

l'intensité passe de 1 A à 0A pendant $\Delta t = 1$ ms, bobine idéale : $L = 1H$.

$$u_L = L\frac{di}{dt} \simeq L\frac{\Delta i}{\Delta t} = 1 \times \frac{(-1)}{10^{-3}} = -10^3 V$$

⇒ il apparait donc une surtension aux bornes de la bobine, étincelle à l'interrupteur pour rétablir la continuité du courant dans le circuit. Passage des $e^-$ dans l'air (éclair par l'ionisation de l'air).

- **Equation différentielle d'évolution de $i$**

D'après la loi d'additivité des tensions : $u_L + u_R = 0$

Par définition : $u_L = L\frac{di}{dt} + ri$ et $u_R = Ri$ donc $L\frac{di}{dt} + ri + Ri = 0$

$$L\frac{di}{dt} + (r+R)i = 0.$$

- **Solution générale de l'équation différentielle**

Solution de la forme $i = A + Be^{kt}$

$$L\frac{d(A+Be^{kt})}{dt} + (R+r)(A+Be^{kt})$$

$$= BL\frac{de^{kt}}{dt} + (r+R)A + (r+R)Be^{kt}$$

$$= kBLe^{kt} + (r+R)A + (r+R)Be^{kt}$$

$$KBLe^{kt} + (r+R)Be^{kt} = -(r+R)A$$

$$Be^{kt}(KL + r+R) = -(r+R)A$$

Cette équation est vérifiée à toutes les dates.

$A(r+R) = 0$ et $Lk + r + R = 0$ car $B \neq 0$ et $e^{kt} > 0$

et $k = -\frac{r+R}{L} = -\frac{1}{\tau}$

La solution générale est de la forme $i = Be^{-\frac{t}{\tau}}$

D'après les conditions initiales : à $t = 0$ s $\Rightarrow i = I$, le courant est établi dans le circuit (régime permanent)

donc $i(0) = Be^{0} = B = I$ donc $i = Ie^{-\frac{t}{\tau}}$

## Expression de la tension aux bornes de la bobine :

$$u_L = L\frac{di}{dt} + ri$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{I}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{I(r+R)}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

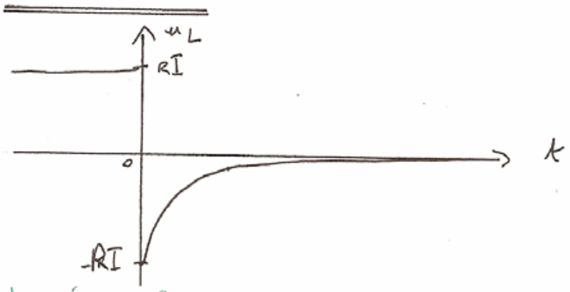
Donc $$u_L = L\left(-\frac{I(r+R)}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + rIe^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_L = -Ire^{-\frac{t}{\tau}} - Rie^{-\frac{t}{\tau}} + rIe^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_L = -R.Ie^{-\frac{t}{\tau}}$$

Lors de l'ouverture du circuit, il y a discontinuité de $u_L$ avec apparition d'une surtension aux bornes de la bobine.

## Courbe $u_L(t)$ :




## Aspect énergétique

La bobine stocke de l'énergie magnétique. A l'ouverture du circuit, l'énergie emmagasinée par la bobine est fournie au circuit.

$$E_m = \frac{1}{2}Li^2$$

$E_m$ : en J → énergie magnétique stockée par la bobine,

$L$ : en H → inductance de la bobine.

$i$ : en A → intensité du courant dans le circuit.