58 p 357

Soient A et B deux points distincts de l'espace.

a) Déterminons l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\| = AB$.

G barycentre de $\{(A;1);(B;-3)\}$

Donc $\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Donc $\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} - 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})\| = AB$

Donc $\|-2\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB}\| = AB$

Donc $\|-2\overrightarrow{MG}\| = AB$

Donc $2MG = AB$

Donc $MG = \frac{AB}{2}$

Donc M appartient à la sphère de centre G et de rayon $\frac{AB}{2}$.

b) Déterminons l'ensemble des points M tels que :

$\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$

Φ barycentre de $\{(A;1);(B;3)\}$ donc $\overrightarrow{\Phi A} + 3\overrightarrow{\Phi B} = \vec{0}$

Ψ barycentre de $\{(A;1);(B;1)\}$ donc $\overrightarrow{\Psi A} + \overrightarrow{\Psi B} = \vec{0}$

Donc $\|\overrightarrow{M\Phi} + \overrightarrow{\Phi A} + 3(\overrightarrow{M\Phi} + \overrightarrow{\Phi B})\| = 2\|\overrightarrow{M\Psi} + \overrightarrow{\Psi A} + \overrightarrow{M\Psi} + \overrightarrow{\Psi B}\|$

donc $\|4\overrightarrow{M\Phi}\| = 2\|2\overrightarrow{M\Psi}\|$

donc $4M\Phi = 4M\Psi$

donc $M\Phi = M\Psi$

Donc M appartient au plan médiateur du segment $[\Phi\Psi]$