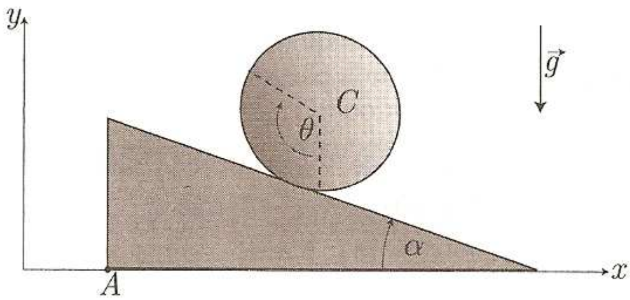
Exercice de mécanique du solide

Dynamique, lois de COULOMB

EXERCICE 1 Dynamique en référentiel non galiléen

Un prisme de masse M, sur lequel roule sans glisser un rouleau, de masse m et de rayon a, peut glisser sans frottements sur une table horizontale.



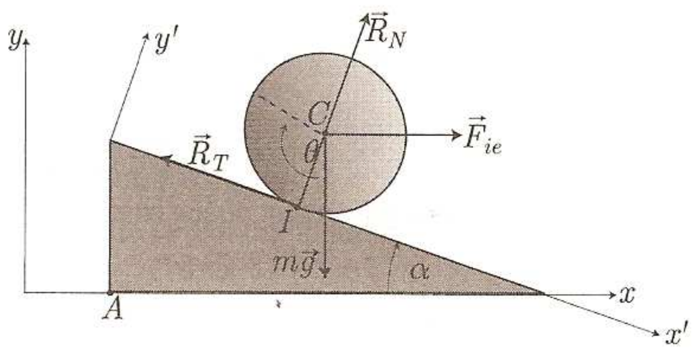
QUESTION 1 Déterminer l'abscisse $x(t)$ du point A du prisme le long du plan horizontal. On considérera que $x(0) = 0$.

QUESTION 2 Exprimer $\theta(t)$ l'angle dont a tourné le rouleau à t. On considérera que $\theta(0) = 0$.

On donne $J = \frac{ma^2}{2}$, moment d'inertie du rouleau par rapport à son axe de révolution.

Solution

QUESTION 1



L'accélération du prisme par rapport à $ROxy$ vaut $\ddot{x}\vec{e}_x$.
Notons $\vec{R}_T$ et $\vec{R}_N$, les composantes des actions de contact du prisme sur le cylindre.

Appliquons le théorème du centre d'inertie au prisme dans le référentiel $ROxy$:

$$M\ddot{x}\vec{e}_x = -\vec{R}_T - \vec{R}_N + M\vec{g} + \vec{N}$$

Le rouleau exerce sur le prisme les actions $-\vec{R}_T$ et $-\vec{R}_N$, d'après le principe des actions réciproques. $\vec{N}$ représente l'action du plan horizontal sur le prisme. On en déduit :

$$M\ddot{x} = R_T \cos\alpha - R_N \sin\alpha$$

Il nous faut donc expliciter $\vec{R}_T$ et $\vec{R}_N$.

Etudions le cylindre dans le référentiel R' non galiléen, ce dernier sera soumis à la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_i = -m\ddot{x}\vec{e}_x$ en plus du poids, et des efforts de contact.

Notons x', l'abscisse de C dans R' et appliquons le théorème du centre d'inertie au cylindre :

$$\vec{F}_i + \vec{P} + \vec{R}_T + \vec{R}_N = m\vec{a}(C)/R' = m\ddot{x}'\vec{e}'_x$$

Projetons cette relation sur les axes Ox' et Oy' :

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - m\ddot{x}\cos\alpha - R_T = m\ddot{x}' \\ -mg\cos\alpha - m\ddot{x}\sin\alpha + R_N = 0 \end{cases}$$

Le moment cinétique dans R' au point C est :

$$\vec{L}_C = -\left(\frac{ma^2}{2}\dot{\theta}\right)\vec{e}_z$$

(attention à l'orientation de θ).

Le théorème du moment cinétique appliqué au cylindre, au point C fournit quand à lui :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_C}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{CI} \wedge \vec{R}_T$$

puisque les moments de trois autres forces sont nuls.

Projetons cette dernière relation sur l'axe Oz :

$$\frac{ma^2}{2}\ddot{\theta} = aR_T$$

d'où

$$\frac{ma}{2}\ddot{\theta} = R_T$$

Pour compléter ces équations utilisons la condition de roulement sans glissement pour le cylindre : $\dot{x}' = a\dot{\theta}$.
La combinaison des équations précédentes permet d'obtenir :

$$\ddot{x} = -\frac{2mg\cos\alpha\sin\alpha}{3M + m\cos^2\alpha + 3m\sin^2\alpha}$$

Cette dernière équation s'intègre en :

$$\boxed{\boldsymbol{x = -\frac{2mg\cos\alpha\sin\alpha}{3M + m\cos^2\alpha + 3m\sin^2\alpha}\left(\frac{t^2}{2a}\right)}}$$

QUESTION 2

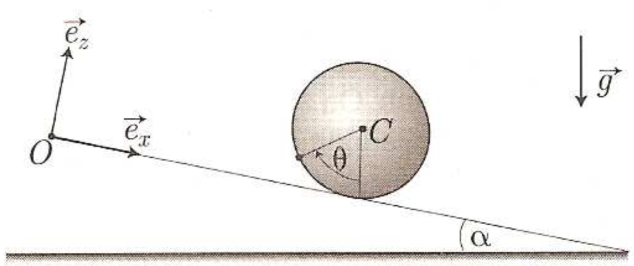
La condition de roulement sans glissement donne ensuite :

$$\boxed{\boldsymbol{\theta = -\frac{2mg\cos\alpha\sin\alpha}{3M + m\cos^2\alpha + 3m\sin^2\alpha}\left(\frac{t^2}{2a}\right)}}$$

⋆ ⋆ ⋆

EXERCICE 2 Lois de COULOMB

Un cylindre de masse m, de rayon a, de moment d'inertie $J = \frac{ma^2}{2}$ par rapport à son axe de révolution et de centre d'inertie C, roule sans glisser le long de la plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.
L'ensemble est étudié dans un référentiel galiléen.
L'air exerce sur le cylindre des efforts équivalents à une force de point d'application C : $\vec{F} = -bm\vec{V}(C)$, b étant un coefficient positif constant.
Les efforts de contact entre le cylindre et le plan incliné obéissent aux lois de COULOMB.
On appelle μ le coefficient de frottement associé.
On repère le cylindre par l'abscisse de C notée : $x(t)$ et par l'angle : $\theta(t)$.
Initialement le cylindre est abandonné immobile, on donne $x(0) = 0$ et $\theta(0) = 0$.



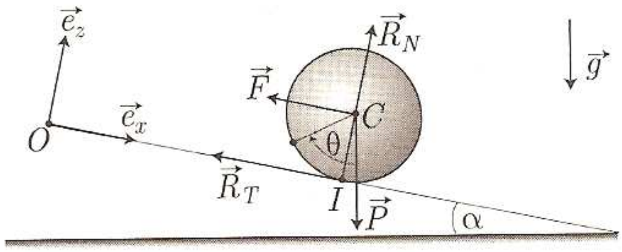
QUESTION 1 Exprimer au cours de la descente $\dot{x}(t)$.

QUESTION 2 Montrer que C va atteindre une vitesse limite que l'on exprimera.

QUESTION 3 Dans le cas où on peut négliger les frottements de l'air, montrer que le roulement sans glissement peut se faire seulement si α est inférieur à une certaine valeur α_0 que l'on explicitera.

Solution

QUESTION 1



Appliquons le théorème de la résultante cinétique au cylindre, ce dernier étant soumis au poids, aux efforts de contact $\vec{R}_T + \vec{R}_N$ et à la force de frottement $\vec{F}$:

$$\vec{P} + \vec{R}_T + \vec{R}_N + \vec{F} = m\vec{a}(G)_{/R}$$

- On obtient sur $\vec{e}_x$

$$mg\sin\alpha - R_T - bm\dot{x} = m\ddot{x}$$

- On obtient sur $\vec{e}_z$

$$mg\cos\alpha - R_N = 0$$

Pour exprimer R_T appliquons le théorème du moment cinétique au cylindre en C :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}_C = \overrightarrow{CI} \wedge \vec{R}_T$$

le moment du poids, de la réaction normale, ainsi que celui de F sont nuls en C.

$$\vec{L}_C = \frac{ma^2}{2}\dot{\theta}\vec{e}_y$$

$$\overrightarrow{CI} \wedge \vec{R}_T = aR_T\vec{e}_y$$

on a donc :

$$\frac{ma^2}{2}\ddot{\theta} = aR_T$$

Les inconnues sont R_T, x et θ, pour deux équations $mg\sin\alpha - R_T - bm\dot{x} = m\ddot{x}$, $mg\cos\alpha - R_N = 0$, complétons avec la condition de roulement sans glissement :

$$\dot{x} = a\dot{\theta}$$

L'équation $\frac{ma^2}{2}\ddot{\theta} = aR_T$ devient :

$$R_T = \frac{m}{2}\ddot{x}$$

injectée dans $mg\sin\alpha - R_T - bm\dot{x} = m\ddot{x}$ elle permet d'obtenir :

$$m\ddot{x} = -bm\dot{x} - \frac{m}{2}\ddot{x} + mg\sin\alpha$$

donc

$$\ddot{x} + \frac{2b}{3}\dot{x} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

La solution de cette équation différentielle du premier ordre à coefficients constants est :

$$\dot{x}(t) = Ae^{-\frac{2b}{3}t} + \frac{g}{b}\sin\alpha$$

$\dot{x}(0) = 0$ donc :

$$\boxed{\dot{x}(t) = \frac{g}{b}\sin\alpha\left(1 - e^{-\frac{2b}{3}t}\right)}$$

QUESTION 2

La vitesse limite est atteinte au bout d'un temps très long, lorsque $t \to \infty$ on a :

$$\boxed{\dot{x} \approx \frac{g}{b}\sin\alpha}$$

QUESTION 3

Dans le cas où on peut négliger les frottements de l'air, l'équation $mg\sin\alpha - R_T - bm\dot{x} = m\ddot{x}$ devient :

$$mg\sin\alpha - R_T = m\ddot{x}$$

L'égalité $\frac{m}{2}\ddot{x} = R_T$ est conservée, donc :

$$R_T = \frac{1}{3} mg \sin\alpha$$

Le roulement sans glissement est assuré tant que

$$R_T < \mu R_N$$

donc tant que

$$\frac{1}{3} mg \sin\alpha < \mu mg \cos\alpha$$

c'est-à-dire tant que

$$\tan\alpha < (3\mu)$$

Soit $\alpha_0 = \arctan(3\mu)$, la condition sur α est :

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha < \alpha_0 = \mathbf{arctan}(3\mu)}}$$

⋆ ⋆ ⋆

❖ ❖ ❖