



Formulaire d'analyse vectorielle

1 Composition d'opérateurs

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{0}$$

$$\text{div} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = 0$$

$$\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} V = \Delta V$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

2 Composition des champs

$$\overrightarrow{\text{grad}}(V_1 V_2) = V_1 \overrightarrow{\text{grad}} V_2 + V_2 \overrightarrow{\text{grad}} V_1$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(V \vec{A}) = V \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} V \wedge \vec{A}$$

$$\text{div}(V \vec{A}) = V \text{div} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{A}$$

$$\text{div}(\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2) = \vec{A}_2 \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_1 - \vec{A}_1 \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_2$$

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}$$

3 Théorème d'OSTROGRADSKY

$$\oint_{(S)} \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iiint_{(V)} \text{div} \vec{A} d\tau$$

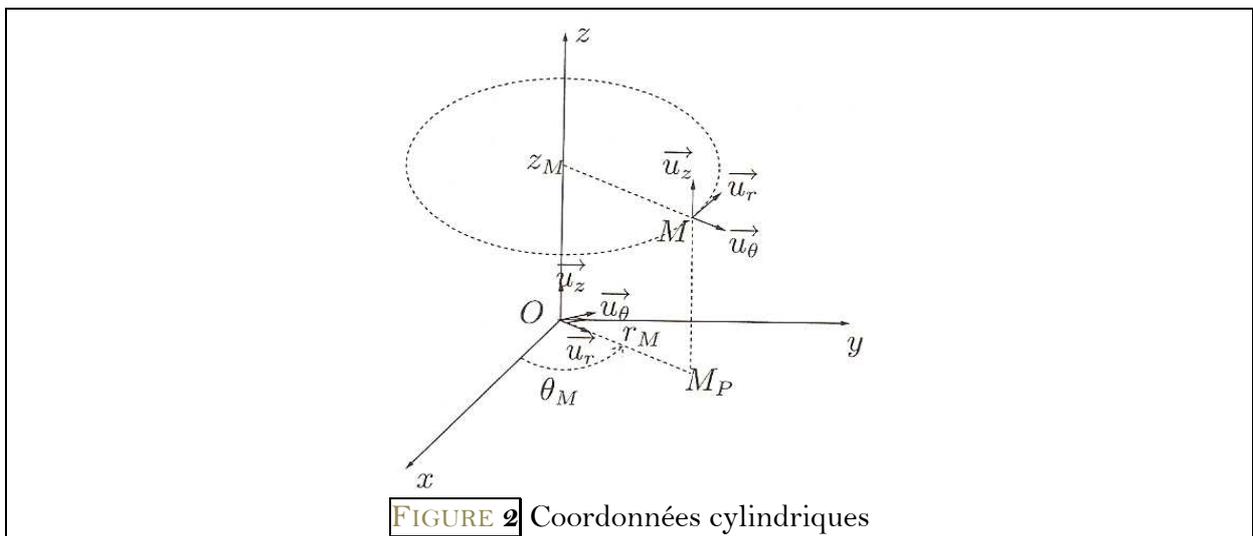
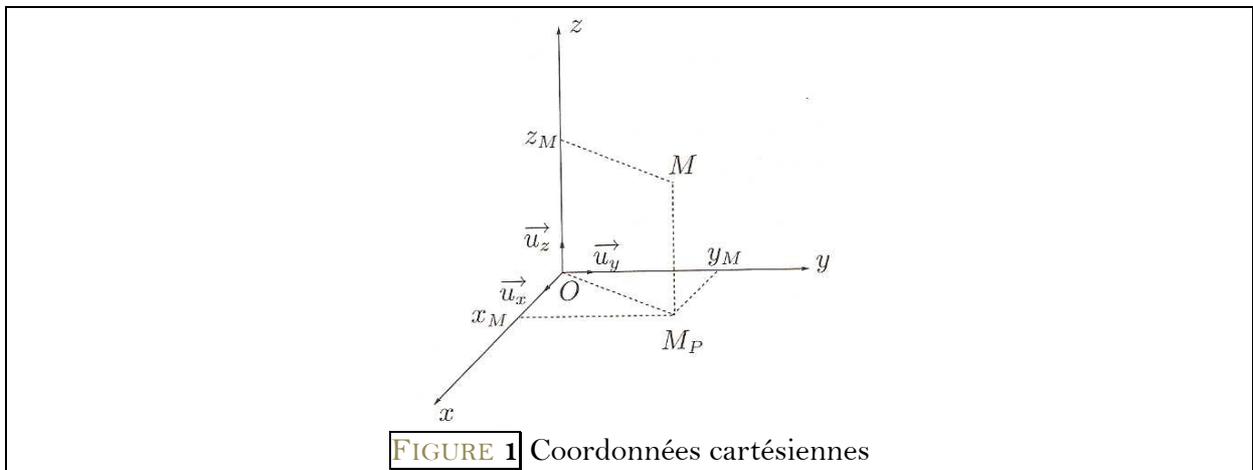
Le flux d'un champ de vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale triple de sa divergence étendue au volume intérieur de cette surface.

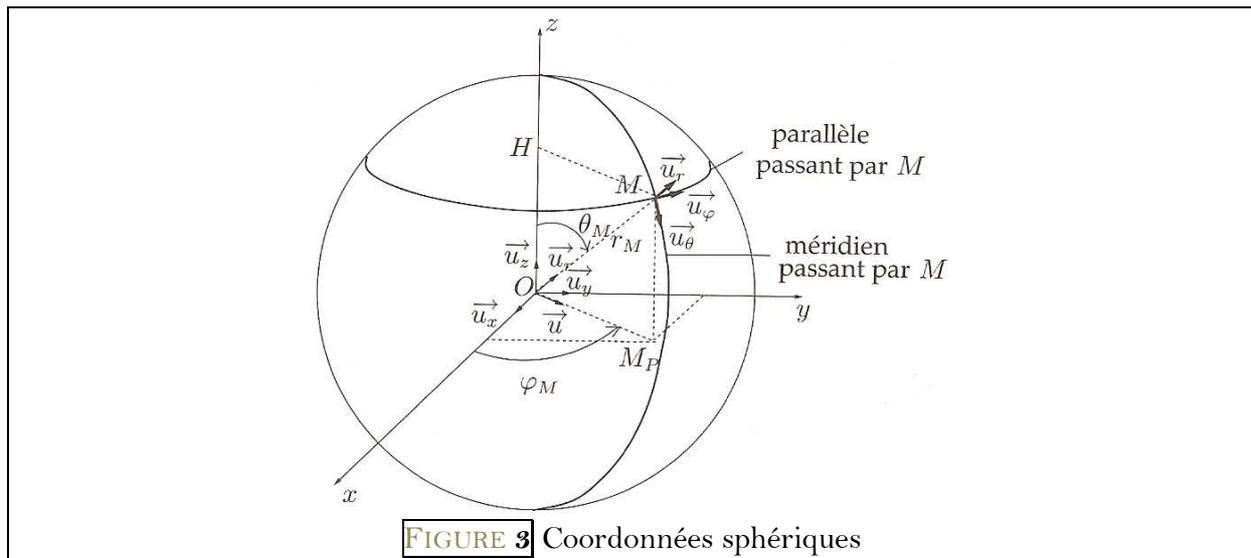
4 Théorème de STOKES

$$\oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{M} = \iint_{(S)} \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

La circulation d'un champ de vecteur le long d'un contour fermé est égale au flux de son rotationnel à travers une surface quelconque s'appuyant sur ce contour.

5 Systèmes de coordonnées





6 Coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{\text{grad}}V = \vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

$$\Delta V = \vec{\nabla}^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Les vecteurs unitaires \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z en chaque point, constituent des champs uniformes et ont tous une divergence et un rotationnel nuls.

7 Coordonnées cylindriques

Seule la formule du gradient est à connaître en coordonnées cylindriques.

$$\overrightarrow{\text{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Vecteurs unitaires : $\operatorname{div} \vec{u}_r = \frac{1}{r}$; $\operatorname{rot} \vec{u}_r = \vec{0}$; $\operatorname{div} \vec{u}_\theta = 0$; $\operatorname{rot} \vec{u}_\theta = \frac{\vec{u}_z}{r}$; $\operatorname{div} \vec{u}_z = 0$; $\operatorname{rot} \vec{u}_z = \vec{0}$

8 Coordonnées sphériques

Seule la formule du gradient est à connaître en coordonnées sphériques.

$$\vec{\operatorname{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} \vec{\operatorname{rot}} \vec{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

Quelques résultats utiles : $\operatorname{div} \vec{u}_r = \frac{2}{r}$; $\operatorname{rot} \vec{u}_r = \vec{0}$; $\operatorname{rot} \vec{u}_\varphi = \frac{\vec{u}_z}{r \sin \theta}$ et $\vec{\operatorname{grad}} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{u}_r}{r^2}$.

