Exercice de mécanique

Généralités sur le problème à deux corps

D'après Centrale MP 2005 Physique

ENONCE

On considère un système S isolé constitué de deux particules A et B de masses respectives m_a et m_b. On étudie ce système dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen. On se donne également un point O fixe dans ce référentiel. On appelle $\vec{F}_a$ (respectivement $\vec{F}_b$) la force exercée par B sur A (respectivement exercée par A sur B). On suppose que leur module ne dépend que de la distance r entre les deux particules.

1. Soit C le centre de masse du système S. Dans le référentiel $\mathcal{R}$, donner l'expression de la vitesse de C en fonction des vitesses des points A et B. Quel est le mouvement de C dans $\mathcal{R}$?
2. Qu'appelle-t-on référentiel barycentrique ?
3. On se place dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ du système S. On note $\vec{r}_a = \overrightarrow{CA}$, $\vec{r}_b = \overrightarrow{CB}$ et on appelle $\vec{v}_a^*$ (respectivement $\vec{v}_b^*$) la vitesse du point A (respectivement la vitesse du point B) dans ce référentiel. Quelle est la relation entre $\vec{v}_a^*$ et $\vec{v}_b^*$?
4. On pose $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$. Donner le lien entre $\vec{r}_a$ et $\vec{r}$ puis entre $\vec{r}_b$ et $\vec{r}$.
5. Montrer que le problème possédait initialement 6 variables d'espace et qu'il est maintenant réduit à 3 variables d'espace dans le référentiel barycentrique.
6. Montrer que l'étude du système dans ce référentiel se réduit à l'étude plus simple du mouvement d'une seule particule (que l'on nommera mobile fictif) de masse μ et de vecteur position $\vec{r}$ soumis à la force $\vec{F}_b$. On donnera l'expression de μ.
7. Dans le cas particulier où $m_b \gg m_a$, que vaut μ et où se trouve le centre de masse C ?

⋆ ⋆ ⋆

Solution

1.

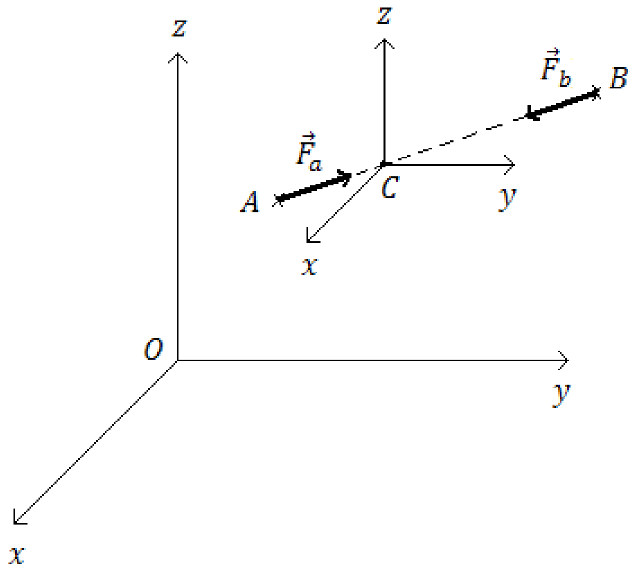

FIGURE A

$$\mathcal{R}(Oxyz) \quad \mathcal{R}^*(Cxyz)$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{m_a\overrightarrow{OA} + m_b\overrightarrow{OB}}{m_a + m_b}$$

d'où

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{v}_{\mathcal{R}}(C) = \frac{m_a\vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + m_b\vec{v}_{\mathcal{R}}(B)}{m_a + m_b}}}$$

$S = \{A, B\}$ étant isolé, il ne subit aucune force extérieure.

Pour S, le théorème du centre de masse s'écrit :

$$(m_a + m_b)\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathcal{R}}(C)}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$$

D'où

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(C) = \overrightarrow{cte}$$

$\boxed{\textbf{Le mouvement de } \boldsymbol{C} \textbf{ est rectiligne uniforme.}}$

2. Un référentiel est l'association d'un repère d'espace et d'une base de temps. On confond souvent repère et référentiel car en mécanique classique, le temps est le même dans tous les référentiels.

Le référentiel barycentrique d'un système S est le référentiel dont le repère d'espace a pour origine le centre de masse du système S et des axes parallèles à ceux du repère d'étude $(Oxyz)$.

3.

$$\vec{r}_a = \overrightarrow{CA} \quad \vec{r}_b = \overrightarrow{CB}$$

$$\vec{v}_a^* = \vec{v}_{\mathcal{R}^*}(A) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{CA}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}^*} \underbrace{=}_{\substack{\mathcal{R}^* \text{ est en} \\ \text{translation} \\ \text{par rapport} \\ \text{à } \mathcal{R}}} \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{CA}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \underbrace{=}_{\text{notation}} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{CA}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_a}{\mathrm{d}t}$$

De même :

$$\vec{v}_b^* = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_b}{\mathrm{d}t}$$

Alors :

$$m_a\vec{r}_a + m_b\vec{r}_b = \vec{0}$$

implique

$$\boxed{\boldsymbol{m_a\vec{v}_a^* + m_b\vec{v}_b^* = \vec{0}}}$$

4. On a :

$$\begin{cases} \vec{r} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \vec{r}_b - \vec{r}_a \\ \vec{0} = m_a\vec{r}_a + m_b\vec{r}_b \end{cases}$$

D'où en multipliant successivement par m_a et m_b la première équation :

$$\begin{cases} (m_a + m_b)\vec{r}_a = -m_b\vec{r} \\ (m_a + m_b)\vec{r}_b = m_a\vec{r} \end{cases}$$

d'où

$$\boxed{\begin{cases} \vec{r}_a = -\dfrac{m_b}{m_a + m_b}\vec{r} & (1) \\ \vec{r}_b = \dfrac{m_a}{m_a + m_b}\vec{r} & (2) \end{cases}}$$

5. Initialement, les inconnues étaient les coordonnées de A et B dans $\mathcal{R}$, au nombre de 6. Dans $\mathcal{R}^*$, la connaissance des composantes de $\vec{r}$, soit 3 inconnues, permet de reconstituer les coordonnées de A et B dans $\mathcal{R}^*$ grâce aux formules (1) et (2).

6. $\mathcal{R}^*$ est un référentiel galiléen puisqu'il est en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$. Donc dans $\mathcal{R}^*$, les relations fondamentales dynamiques pour A et B s'écrivent :

$$m_a\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_a}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_a \;\; \textbf{(3)}$$

$$m_b \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_b}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_b \ \ (\mathbf{4})$$

Avec (1) et (3) on obtient :

$$-\frac{m_a m_b}{m_a + m_b}\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_a \ \ (\mathbf{1}')$$

Avec (2) et (4) on obtient :

$$\frac{m_a m_b}{m_a + m_b}\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_b \ \ (\mathbf{2}')$$

En définissant le point fictif P tel que $\vec{r} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CP}$, $(2')$ s'écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{\mu}\frac{\mathbf{d}^2\overrightarrow{\boldsymbol{CP}}}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}^2} = \overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{b}}} \text{ avec } \boxed{\boldsymbol{\mu} = \frac{\boldsymbol{m_a m_b}}{\boldsymbol{m_a} + \boldsymbol{m_b}}}$$

Cette relation peut être considérée comme la relation fondamentale de la dynamique appliquée dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}^*$ au point fictif P de masse μ, soumis à la force $\vec{F}_b$.

Son intégration permet d'obtenir la trajectoire $\overrightarrow{CP}(t) = \vec{r}(t)$ dont on déduit les trajectoires $\overrightarrow{CA}(t) = \vec{r}_a(t)$ et $\overrightarrow{CB}(t) = \vec{r}_b(t)$ grâce à (1) et (2).

7. Si $m_b \gg m_a$,

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} = \frac{\boldsymbol{m_a}}{\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{m_a}}{\boldsymbol{m_b}}} \ \# \ \boldsymbol{m_b}}$$

et

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{OC}} = \frac{\boldsymbol{m_a}}{\boldsymbol{m_a} + \boldsymbol{m_b}}\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} + \frac{\boldsymbol{m_b}}{\boldsymbol{m_a} + \boldsymbol{m_b}}\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} \ \# \ \overrightarrow{\boldsymbol{OB}}}$$