Cours de mathématiques

Généralités sur les séries

1 Notion de série

DEFINITIONS *1.* **1** Série

- On appelle série à termes dans E tout couple $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ formé d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes dans E et de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k}$$

- L'élément u_n s'appelle le $n^{ème}$ terme (ou terme général) de la série, et S_n s'appelle la $n^{ème}$ somme partielle de la série.
- La série est notée $\sum_{n\geq 0} u_n$.

DEFINITIONS *1.* **2** Convergence des séries

- On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge (dans E), et, dans ce cas, la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$, et notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
- La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge si, et seulement si, elle ne converge pas.
- Deux séries sont de même nature si, et seulement si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

PROPRIETE *1.* **3** Changement d'indice de départ

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes dans E, et $n_0 \in \mathbb{N}$.

Les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} u_n$ sont de même nature, et, si elles convergent, on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n}$$

PREUVE 1.4 Changement d'indice de départ

1) Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors, comme $\forall n \geq n_0$, $\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$, $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge, et $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$.
2) Si $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge, alors, comme $\forall n \geq n_0$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

2 Condition nécessaire de convergence d'une série

PROPRIETE 2.1 Condition nécessaire de convergence d'une série

Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors

$$\boxed{\boldsymbol{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}}$$

PREUVE 2.2 Condition nécessaire de convergence d'une série

En notant $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, on a[1] :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$$

et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S - S = 0$.

REMARQUE 2.3 Divergence grossière

Lorsque $u_n \underset{n\to+\infty}{\nrightarrow} 0$, on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement.
Par exemple, la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$ diverge grossièrement.

REMARQUE 2.4

La réciproque est fausse, il se peut que $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

EXEMPLE 2.5

$u_n = \ln(n+1) - \ln n \;\; (n \geq 1)$.

- $\sum_{k=1}^{n} k = \ln(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.
- $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

[1] Expression du terme général à l'aide des sommes partielles.

Thierry ALBERTIN
http://ts2-thierrymaulnier.wifeo.com/

EXEMPLE 2. 6 Série harmonique

La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est appelée série harmonique. On note souvent : $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en notant $m = E\left(\frac{\ln n}{\ln 2}\right)$, on a $n \geq 2^m$, d'où[2] :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{2^m}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)$$
$$\geq 1+\frac{1}{2}+2.\frac{1}{4}+4.\frac{1}{8}+2^{m-1}.\frac{1}{2^m} = 1+\frac{m}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$$

  Donc $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge.
- $\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

3 Lien suite/série

PROPRIETE 3. 1 Lien suite/série

Soit (a_n) une suite à termes dans E.

La suite de terme général a_n converge si et seulement si la série de terme général $a_{n+1}-a_n$ converge.

PREUVE 3. 2 Lien suite/série

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par simplification de termes deux par deux :

$$\sum_{n=0}^{N}(a_{n+1}-a_n) = (a_{N+1}-a_N)+(a_N-a_{N-1})+\cdots+(a_1-a_0) = a_{N+1}-a_0$$

1) Si la suite de terme général a_n converge, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^{N}(a_{n+1}-a_n)$ $N\to+\infty\ell-a0$, donc la série de terme général $an+1-an$ converge.
2) Réciproquement, si la série de terme général $a_{n+1}-a_n$ converge, il existe $S \in E$ tel que $\sum_{n=0}^{N}(a_{n+1}-a_n)\xrightarrow[N\to+\infty]{}S$, et alors $a_{N+1}-a_0\xrightarrow[N\to+\infty]{}S$, $a_{N+1}\xrightarrow[N\to+\infty]{}a_0+S$, $a_N\xrightarrow[N\to+\infty]{}a_0+S$, donc la suite de terme général a_n converge.

[2] On s'intéresse aux sommes partielles dont l'indice est une puissance de 2.

4 Reste d'ordre n d'une série convergente

DEFINITION 4. 1 Reste d'ordre n d'une série convergente

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes dans E, convergente.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la somme de la série $\sum_{k\geq n+1} u_k$ est appelée le $n^{\text{ème}}$ reste de la série et souvent notée R_n :

$$\boxed{\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{R_n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \boldsymbol{u_k}}$$

On a ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{S_n} + \boldsymbol{R_n}}$$

PROPRIETE 4. 2

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes dans E, convergente, et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, R_n le $n^{\text{ème}}$ reste.

On a alors :

$$\boxed{\boldsymbol{R_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{0}}$$

PREUVE 4. 3

En notant $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, on a : $R_n = S - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$.

❖ ❖ ❖