Exercice d'optique ondulatoire

Interférences à deux ondes lumineuses

ENONCE

Quel intérêt y a-t-il à faire interférer des ondes d'égale intensité ? Justifier en exprimant le facteur de visibilité de la figure d'interférences :

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Solution

Soient deux signaux d'amplitudes s_{01} et s_{02}, tels que s_2 présente un déphasage ϕ par rapport à s_1. Ces deux signaux sont alors caractérisés par leurs notations complexes :

$$\underline{s}_1 = s_{01} e^{-j\omega t} e^{j\varphi}$$

et

$$\underline{s}_2 = s_{02} e^{-j\omega t} e^{j\varphi} e^{j\phi}$$

Lorsque les deux ondes associées interférent, leurs signaux s'additionnent :

$$\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 = e^{j(\varphi - \omega t)}.\left(s_{01} + s_{02} e^{j\phi}\right)$$

et l'intensité qui en découle est proportionnelle à $\left|\underline{s}\right|^2 = \underline{s}.\underline{s}^*$ (on note κ la constante réelle de proportionnalité) :

$$I = \kappa\, \underline{s}.\underline{s}^*$$

$$= \kappa\left(s_{01} + s_{02} e^{j\phi}\right)\left(s_{01} + s_{02} e^{-j\phi}\right)$$

$$= \kappa\left[s_{01}^2 + s_{02}^2 + s_{01} s_{02}\left(e^{j\phi} + e^{-j\phi}\right)\right]$$

$$= \kappa s_{01}^2 \left[1 + \left(\frac{s_{02}}{s_{01}}\right)^2 + 2\frac{s_{02}}{s_{01}} \cos\phi\right]$$

c'est-à-dire, en notant $I_0 = \kappa s_{01}^2$ et $s_{02} = \alpha s_{01}$:

$$I = I_0\left(1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos\phi\right)$$

Le déphasage ϕ pouvant varier entre 0 et 2π, l'intensité I varie entre deux valeurs extrêmes :

$$I_{\max} = I_0(1+\alpha^2+2\alpha) \text{ pour } \cos\phi = 1$$

et

$$I_{\min} = I_0(1+\alpha^2-2\alpha) \text{ pour } \cos\phi = -1$$

Le facteur de visibilité est alors défini par :

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}$$

d'où :

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{V} = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}}}$$

Cette fonction de α admet un extremum pour une valeur de α qui annule $\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathrm{d}\alpha}$, avec :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2(1+\alpha^2)-2\alpha.2\alpha}{(1+\alpha^2)^2} = 2\frac{(1-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)^2}$$

c'est-à-dire que $\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathrm{d}\alpha} = 0$ pour $\alpha = 1$. Enfin, le tableau de variations révèle que :

le facteur de visibilité $\mathcal{V}$ est maximum pour $\alpha = 1$, c'est-à-dire lorsque les amplitudes s_{01} et s_{02} sont égales

α	0		1	
$\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathrm{d}\alpha}$		+	0	−
$\mathcal{V}$		$\nearrow$		$\searrow$

❖ ❖ ❖