Chapitre 3

Magnétostatique

VECTEUR DENSITE DE COURANTS VOLUMIQUES

- Le vecteur densité de courants volumiques $\vec{j}$ est tel que le flux de $\vec{j}$ à travers une surface S orientée est égal à l'intensité du courant traversant S :

$$i(t) = \iint_S \vec{j}(\vec{r},t).\vec{n}(\vec{j})dS(\vec{r})$$

- S'il y a plusieurs types de charges mobiles, l'additivité des courants implique :

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \sum_k \vec{j_k}(\vec{r},t)$$

- Pour une espèce de type k, si $n_k(\vec{r},t)$ est le nombre de particules par mètre cube, q_k la charge d'une particule et $\vec{v_k}(\vec{r},t)$ la vitesse moyenne d'une particule, on montre que :

$$\vec{j_k} = n_k q_k \vec{v_k}$$

EQUATION DE CONSERVATION DE LA CHARGE

$$\mathrm{div}\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0$$

$$\iiint_D \big(\rho(M,t+dt) - \rho(M,t)\big)d\tau + \iiint_D \mathrm{div}\vec{j}\, d\tau\, dt = 0$$

Pour des régimes stationnaires :

$$\mathrm{div}\vec{j}(\vec{r}) = 0$$

$\vec{j}$ est à flux conservatif

DENSITE SURFACIQUE DE COURANT

- Le vecteur densité surfacique de courant $\vec{j_S}$ est tangent en M à la surface (il correspond à un mouvement de charges en surface).
- Lien avec l'intensité du courant traversant un arc de courbe dessiné sur la surface :

$$di = \vec{j_S}.\vec{n}\, dl_t$$

MODELE SIMPLE DE DRUDE

Les électrons d'une conducteur ohmique sont soumis à :

- la force électromagnétique de LORENTZ en :

$$q\big(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\big)$$

- la force de freinage (τ étant la durée moyenne entre deux collisions entre électrons et réseau) en :

$$-\frac{m\vec{v}}{\tau}$$

RELATION D'AMPERE

- Si $\mathcal{C}$ est un contour fermé :

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 \sum_k \varepsilon_k I_k$$

Avec $\varepsilon_k = \pm 1$ selon le sens des courants traversant la surface S orientée.

- μ_0 est la perméabilité du vide :

$$\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}}$$

RELATION LOCALE

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}(M)$$

CARACTERE CONSERVATIF DE $\vec{B}$

- Les lignes de champ magnétostatique sont fermées.
- Il n'y a pas de monopôles magnétiques :

$$\mathrm{div}\vec{B}(M) = 0$$

POTENTIEL VECTEUR MAGNETOSTATIQUE

- Puisque $\mathrm{div}\vec{B}(M) = 0$, il existe $\vec{A}(M)$ (potentiel vecteur) tel que :

$$\vec{B}(M) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}(M)$$

- Jauge de COULOMB : si $\vec{A}$ vérifie $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}$, alors :

$$\overrightarrow{A'} = \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(M)$$

satisfait à $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{A'}$.
On impose donc une condition dite de jauge sur $\vec{A}$:

$$\mathrm{div}\vec{A}(M) = 0$$

RELATIONS DE CONTINUITE POUR LES CHAMPS $\vec{B}$ ET $\vec{A}$

- $\vec{A}(M)$ est une fonction continue du point pour les distributions usuelles (pas de couche double dipolaire magnétique).
- $\vec{B}$ a ses composantes normales continues.
- $\vec{B}$ a ses composantes normales discontinue à la traversée d'une nappe surfacique de courants $\vec{j_S}$.

Pour résumer :

$$\overrightarrow{B_2}(M) - \overrightarrow{B_1}(M) = \mu_0 \vec{j_S}(M) \wedge \vec{n}(M)$$

Avec $\overrightarrow{B_i}(M) = \lim_{M_i \to M} \vec{B}(M_i)$.

EXPRESSIONS DE $\vec{A}$

Pour $D(\vec{j})$ bornée :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{D(\vec{j})} \frac{\vec{j}(P)d\tau(P)}{PM} + \overrightarrow{A_0}$$

LOI DE BIOT-SAVART

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{D(\vec{j})} \frac{\vec{j}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} d\tau(P)$$

POTENTIEL VECTEUR ASSORCIE A UN CHAMP $\vec{B}$ UNIFORME

$$\vec{A}(M) = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \overrightarrow{OM}$$

MOMENT MAGNETIQUE

- Certaines particules (électrons, neutrons, photons) possèdent un moment cinétique de spin $\vec{S}$.
- A ce moment cinétique est associé un vecteur moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{S}$.
- A un atome (moment cinétique orbital, moment cinétique de spin), est associé un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ tel que :

$$\vec{\mathcal{M}} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

avec $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

CIRCUITS FERMES PARCOURUS PAR DES COURANTS

- De tels circuits seront assimilables à des dipôles seulement si leur taille est très inférieure à la distance où on calcule les champs.
- Pour une boucle plane :

$$\vec{\mathcal{M}} = SI\vec{n}$$

- Pour une boucle quelconque :

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} i\vec{r} \wedge \overrightarrow{dr}$$

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\iiint_{D(\vec{J})} \vec{r} \wedge \vec{J} d\tau$$

POTENTIEL VECTEUR D'UN DIPOLE

Le potentiel vecteur d'un dipôle de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ est :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

CHAMP MAGNETIQUE CREE PAR UN DIPOLE PLACE EN O

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3}\left(\frac{(3\vec{\mathcal{M}}.\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\mathcal{M}}\right)$$

EQUATION DES LIGNES DE CHAMP MAGNETOSTATIQUE

$$r = r_0 \sin^2\theta$$

❖❖❖