Exercice d'optique ondulatoire

Interféromètre de MICHELSON : franges rectilignes d'égale épaisseur

Dans l'interféromètre de MICHELSON à deux miroirs plans M_1 et M_2 schématisé ci-dessous (FIGURE 1), la source S est placée au foyer du collimateur (L), la séparatrice Σ est inclinée de $45°$ sur le faisceau incident transmis par la lentille (L), et la lentille d'observation (L') est disposée, à la sortie du MICHELSON, parallèlement au miroir M_2. Les déphasages dus à la traversée de la séparatrice Σ ne seront pas pris en compte, car ils sont compensés par une lame compensatrice non représentée sur la figure.

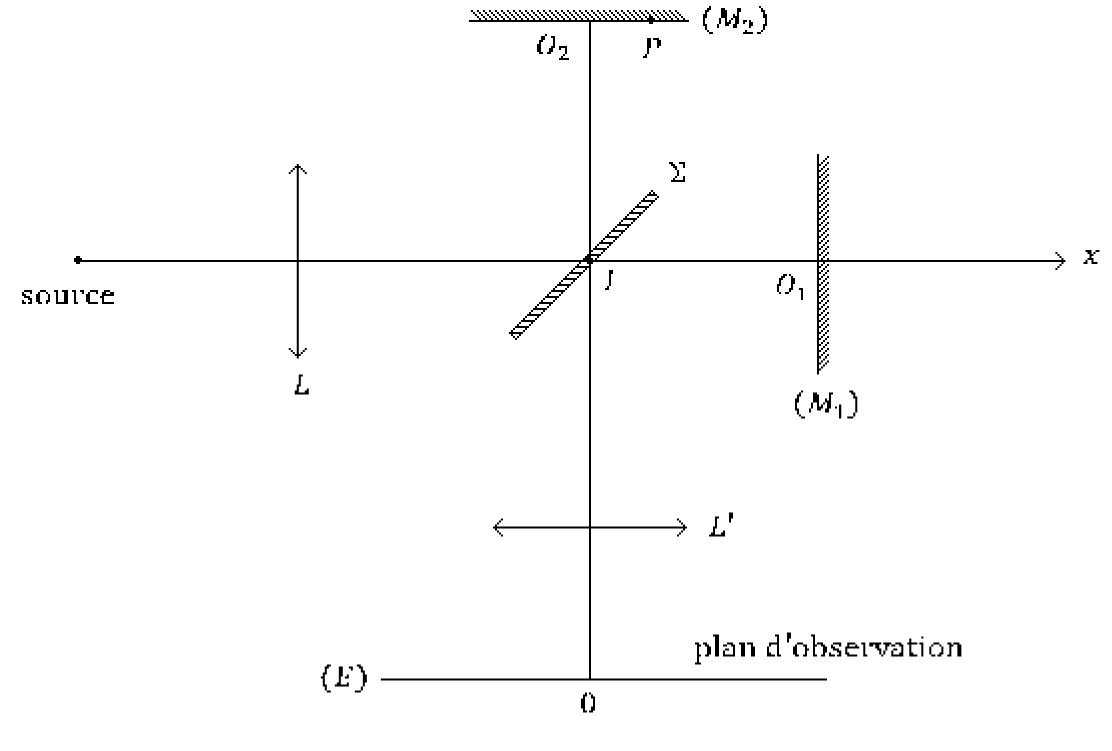

FIGURE 1 Interféromètre de MICHELSON

Les miroirs M_1 et M_2 étant initialement orthogonaux et tels que $IO_1 = IO_2$, on fait tourner M_1 d'un petit angle θ autour d'un axe perpendiculaire au plan de figure : on observe les franges sur un écran (E) placé dans le plan du conjugué de M_2 par rapport à L'.

1. La source S est monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 5086$ Å.
   (a) On considère un point P du miroir M_2, repéré par l'abscisse $X = \overline{O_2P}$. Déterminer la forme des franges et exprimer l'intensité vibratoire en P. Calculer l'interfrange ΔX en fonction de λ et θ.

(b) On observe sur l'écran : $N = 12$ franges noires, les extrémités de l'image du miroir correspondant à des maxima d'intensité. Sachant que le diamètre des miroirs est $D = 20$ mm, calculer l'angle θ (en secondes d'arc).

2. On remplace la radiation bleue $\lambda = 5086$ Å par la radiation rouge $\lambda' = 6438$ Å. Combien de franges sombres et brillantes observe-t-on ?
3. La source S est la lampe à vapeur de sodium (source bichromatique). En déplaçant M_1 d'un mouvement de translation, les franges nettes disparaissent puis réapparaissent périodiquement. Combien de franges défilent en un point de l'écran entre une disparition des franges et la disparition suivante ?

Solution

1.

(a) L'interféromètre est équivalent à un coin d'air compris entre M_2 et $M_1{}'$ (FIGURE 2) d'angle θ, où $M_1{}'$ est l'image du miroir M_1 par rapport à la séparatrice Σ.

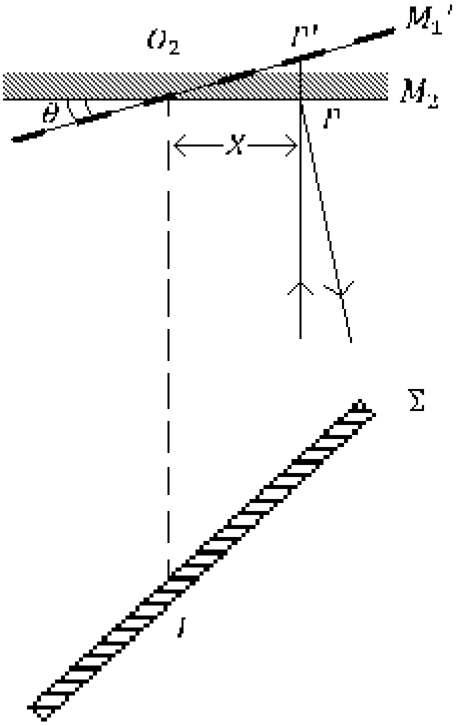

FIGURE 2 Equivalence de l'interféromètre à un coin d'air

La différence de marche au niveau du point d'incidence P de M_2 est pratiquement :

$$\delta = 2.PP' + \frac{\lambda}{2} = 2X\tan\theta + \frac{\lambda}{2} \approx 2X\theta + \frac{\lambda}{2}$$

Les franges sont localisées à l'intersection des rayons réfléchis sur M_2 et M_1', correspondant à un même incident, dont sont pratiquement localisées sur le miroir M_2.
L'ordre d'interférence en P est :

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2X\theta}{\lambda} + \frac{1}{2}$$

Les franges, lieu des points de même intensité, donc de même ordre d'interférence, son telles que $p = cte$ ou $X = cte$; les franges sont donc des droites parallèles à l'arête du dièdre (M_2, M_1'), localisées sur le coin d'air et observables dans le plan (E) conjugué de M_2 à travers L'.

- L'intensité vibratoire en P est donc (interférence à deux ondes de même intensité :

$$I(P) = I_0(1 + \cos 2\pi p)$$

ou, comme $p = \frac{2X\theta}{\lambda} + \frac{1}{2}$:

$$\boxed{I(P) = I_0\left(1 - \cos\left(\frac{4\pi\theta}{\lambda}X\right)\right)}$$

- L'interfrange ΔX correspondant à $|\Delta p| = 1$ est donc, comme $p = \frac{2X\theta}{\lambda} + \frac{1}{2}$:

$$\boxed{\Delta X = \frac{\lambda}{2\theta}}$$

(b) Le miroir de diamètre D contient $N = 12$ interfranges par hypothèse. Les franges rectilignes d'égale épaisseur ont donc pour interfrange :

$$\Delta X = \frac{D}{N}$$

On en déduit, puisque $\Delta X = \frac{\lambda}{2\theta}$, l'angle θ du coin d'air :

$$\theta = \frac{\lambda}{2\Delta X}$$

ou

$$\boxed{\theta = \frac{N\lambda}{2D}}$$

Application numérique :

$$\boxed{\theta = 1{,}526.10^{-4}\ \text{rad}\ \approx 31{,}5''}$$

2. Avec la raie λ', l'interfrange devient, puisque $\Delta X = \frac{\lambda}{2\theta}$:

$$\Delta X' = \frac{\lambda'}{2\theta}$$

soit

$$\Delta X' = \frac{\lambda'}{\lambda}\Delta X = \frac{\lambda' D}{\lambda N}$$

Le nombre d'interfranges observées avec la raie λ' est donc :

$$N' = \frac{D}{\Delta X'}$$

ou

$$N' = \frac{N\lambda}{\lambda'}$$

Application numérique :

$$\boxed{N' = 9{,}48\ \text{interfranges}}$$

Au centre, la frange est noire ($X = 0$ donc $p = \frac{1}{2}$ est demi-entier). On observera donc $\boxed{\text{9 franges noires et 10 franges brillantes}}$.

3. Il y a brouillage des franges si, au point considéré, la frange brillante de radiation λ_1 coïncide avec la frange sombre de la radiation λ_2 (anticoïncidence).

Premier brouillage : $\delta = p_1\lambda_1 = \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)\lambda_2$, soit :

$$p_1 \approx \frac{\lambda}{2\Delta\lambda}$$

Deuxième brouillage : $\delta = p_1'\lambda_1 = \left(p_1' - \frac{3}{2}\right)\lambda_2$, soit :

$$p_1' \approx \frac{3\lambda}{2\Delta\lambda}$$

Donc, entre deux brouillages consécutifs, l'ordre d'interférence varie en un point donné de la quantité :

$$p'_1 - p_1 = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

Application numérique :

$$p'_1 - p_1 = \frac{5892{,}9}{6} = 982$$

On observe donc une disparition de franges périodique après défilement de $\boxed{\text{982 franges}}$[1].

[1] Ce résultat peut également être établi à partir de la visibilité.