Exercice de statique des fluides

Modèle polytropique de l'atmosphère

ENONCE

L'air est assimilé à un gaz parfait, de masse molaire M. On se donne, dans l'atmosphère, une relation entre la pression $p(z)$ et la masse volumique $\mu(z)$ de l'air à une altitude z, appelée *loi polytropique d'indice* k :

$$\frac{p(z)}{\left(\mu(z)\right)^k} = cte$$

k est une constante donnée, ajustée *a posteriori* aux données expérimentales. Le modèle de l'atmosphère polytropique constitue une généralisation du modèle de l'atmosphère isotherme pour lequel on aurait $k = 1$. Dans la suite, k est choisi différent de l'unité.
Au niveau du sol ($z = 0$), on note p_0 la pression, T_0 la température et μ_0 la masse volumique de l'air.

QUESTION 1 Etablir une relation donnant implicitement $p(z)$.

QUESTION 2 Montrer que $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}$ est une constante que l'on exprimera en fonction de l'intensité de la pesanteur g, de la masse molaire M de l'air, de la constante molaire des gaz parfaits R et de k.

QUESTION 3 En déduire que :

$$p(z) = p_0(1 - \beta z)^{\frac{k}{k-1}}$$

où β est un coefficient que l'on déterminera en fonction de M, g, R, T_0 et k.

Solution

QUESTION 1

Une masse δm d'air, de volume δV, est soumise à son poids $\delta\vec{P}$, en plus des forces de pression. C'est pourquoi la force volumique qui s'exerce sur cette masse vaut :

$$\vec{F}_V = \frac{\delta\vec{P}}{\delta V} = \frac{\delta m}{\delta V}\vec{g} = \mu\vec{g} = -\mu g\vec{e}_z$$

où $\vec{e}_z$ est un vecteur unitaire vertical ascendant.
Ce faisant, la loi fondamentale de la statique des fluides :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \vec{F}_V = -\mu g \vec{e}_z$$

devient, dans une base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\frac{\partial p}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{e}_z = -\mu g \vec{e}_z$$

D'une part cette équation montre que $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$, ce qui signifie que p ne dépend que de l'altitude z et d'autre part elle conduit à l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\mu g}$$

QUESTION 2

Un nombre n de moles d'air occupe, à l'altitude z, un volume V sous une pression $p(z)$ et à une température $T(z)$ qui vérifient l'équation d'état des gaz parfaits :

$$p(z)V = nRT(z) = m\frac{RT(z)}{M}$$

où m désigne la masse des n moles d'air. Ainsi la définition de la masse volumique :

$$\mu(z) = \frac{m}{V}$$

conduit à :

$$p(z) = \mu(z)\frac{RT(z)}{M}$$

d'où :

$$\mu = p\frac{M}{RT}$$

qui permet de transformer l'équation $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\mu g$ sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -p\frac{Mg}{RT}$$

d'où :

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=-\frac{Mg}{RT}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}\ln p}{\mathrm{d}z}=-\frac{Mg}{RT}$$

Quant à la loi polytropique, elle s'écrit :

$$\frac{p}{\mu^k}=cte$$

d'où :

$$\ln p-k\ln\mu=cte$$

soit :

$$\frac{\mathrm{d}\ln p}{\mathrm{d}z}=k\frac{\mathrm{d}\ln\mu}{\mathrm{d}z}$$

équation dans laquelle le membre de droite peut être exprimé à l'aide de l'identité $\mu = p\frac{M}{RT}$ ou :

$$\mu=\frac{p}{T}\frac{M}{R}$$

soit

$$\ln\mu=\ln p-\ln T+\ln\left(\frac{M}{R}\right)$$

d'où :

$$\frac{\mathrm{d}\ln\mu}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}\ln p}{\mathrm{d}z}-\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}z}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\mathrm{d}\ln p}{\mathrm{d}z}=k\frac{\mathrm{d}\ln p}{\mathrm{d}z}-k\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}z}$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}\ln p}{\mathrm{d}z}=\frac{k}{k-1}\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}z}$$

Ainsi, l'équation $\frac{\mathrm{d}\ln p}{\mathrm{d}z}=-\frac{Mg}{RT}$ devient-elle :

$$\frac{k}{k-1}\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}z} = -\frac{Mg}{RT}$$

d'où :

$$\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -\frac{k-1}{k}\frac{Mg}{RT}$$

soit enfin :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -\frac{k-1}{k}\frac{Mg}{R} = cte}$$

QUESTION 3

Le résultat précédent s'écrit aussi :

$$\mathrm{d}T = -\alpha \mathrm{d}z$$

avec :

$$\alpha = \frac{k-1}{k}\frac{Mg}{R}$$

D'où :

$$\int_{T_0}^{T(z)} \mathrm{d}T = -\alpha \int_0^z \mathrm{d}z$$

soit :

$$T(z) = T_0 - \alpha z = T_0 - \alpha z = T_0 - \frac{k-1}{k}\frac{Mg}{R}z$$

Quant à l'équation $\frac{\mathrm{d}\ln p}{\mathrm{d}z} = \frac{k}{k-1}\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}z}$, elle fournit la relation entre p et T :

$$\mathrm{d}\ln p = \frac{k}{k-1}\mathrm{d}\ln T$$

d'où :

$$\int_{p_0}^{p(z)} \mathrm{d}\ln p = \frac{k}{k-1}\int_{T_0}^{T(z)} \mathrm{d}\ln T$$

soit :

Thierry ALBERTIN
http://ts2-thierrymaulnier.wifeo.com/

$$\ln\left(\frac{p(z)}{p_0}\right) = \frac{k}{k-1}\ln\left(\frac{T(z)}{T_0}\right) = \frac{k}{k-1}\ln\left(1 - \frac{k-1}{k}\frac{Mg}{R}z\right)$$

d'où enfin :

$$\boxed{p(z) = p_0\left(1 - \frac{k-1}{k}\frac{Mg}{R}z\right)^{\frac{k}{k-1}}}$$

❖ ❖ ❖