Cours de mécanique du solide

Modélisation des actions de contact

Le contact entre deux solides s'effectue selon une surface aussi petite soit-elle, notée $\mathrm{d}S$. On sait que les efforts élémentaires appliqués en un point M par S_2 sur S_1 sont représentés par un vecteur $\mathrm{d}\vec{f}(M, S_1 \to S_2)$ attaché au point M. Le rapport entre l'effort élémentaire et l'élément de surface est une densité surfacique d'effort (homogène à une pression $\mathrm{Nm}^{-2} = \mathrm{Pa}$). Le problème est que dans la plupart des cas il est impossible de connaître la valeur de ces actions en tout point M. On doit alors faire des hypothèses.

CAS 0.1 Cas de contact dit parfait (sans frottement)

On assimile dans ce cas le contact entre deux solides à celui exercé par un fluide parfait sur un solide : dans ce cas les actions sont normales à l'élément de surface local.

REMARQUE 0.2

On constate donc que dès que les actions locales de contact sont connues avec précision, on peut déterminer le torseur des actions de contact.

CAS 0.3 Cas de contact avec frottement

Dans ce cas, nous allons supposer que l'effort $\mathrm{d}\vec{f}(M, S_1 \to S_2)$ est constitué de deux composantes : l'une dirigée suivant la normale $\vec{n}$ en M à la surface de contact et une composante appartenant au plan tangent.

DEFINITION 0.4

On note $\mathrm{d}\vec{f_n}(M, S_1 \to S_2)$ la force normale et $p = \frac{f_n}{\mathrm{d}S}$ la pression correspondante.
On note $\mathrm{d}\vec{f_t}(M, S_1 \to S_2)$ la force tangentielle et $t = \frac{f_t}{\mathrm{d}S}$ la pression (dite de cisaillement) correspondante.

Le problème est d'avoir une relation entre ces deux grandeurs dans le cas général de solides en mouvement relatif.

Soit $\vec{V}(P \in S_2/S_1) = \vec{V_g}$ la vitesse de glissement au point P du solide S_2 par rapport au solide S_1. Ce vecteur appartient au plant tangent en P aux deux solides.

1 Lois de COULOMB

Ces lois expriment une relation entre les actions normales et tangentielles. Bien qu'attribuées à Charles de COULOMB (1726, 1805), elles sont en fait dues à Léonard de VINCI (1452, 1519) qui ne les publia pas, et à AMONTONS (1663, 1705), physicien français qui ajouta un fait expérimental d'indépendance du coefficient de frottement par rapport à la vitesse de glissement. COULOMB, qui cite les travaux d'AMONTONS, a formalisé l'ensemble de ces travaux et observé qu'un objet mis au repos après un glissement relatif possède un coefficient de frottement plus important (coefficient d'adhérence).

CAS 1.1 Premier cas : $\vec{V_g} \neq \vec{0}$

On va considérer le premier cas d'un glissement relatif ($\vec{V_g} \neq \vec{0}$).

Dans cas, la force $\mathrm{d}\vec{f_t}$ est opposée au vecteur glissement relatif et est proportionnelle au vecteur $\mathrm{d}\vec{f_n}$. Ceci s'écrit :

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{d}\vec{f}_t(P, S_2 \rightarrow S_1).\vec{V}\left(P \in \frac{S_2}{S_1}\right) \leq 0 \\ \mathbf{d}\vec{f}_t(P, S_2 \rightarrow S_1) \wedge \vec{V}(P \in S_2/S_1) = \vec{0} \\ \mathbf{d}f_t(P, S_2 \rightarrow S_1) = f\mathbf{d}f_n(P, S_2 \rightarrow S_1)\end{gathered}}$$

La première inégalité exprime le fait que les actions tangentielles s'opposent au glissement relatif, la seconde qu'elles sont colinéaires, et la troisième que ces actions tangentielles, sont proportionnelles, en cas de glissement, aux actions normales. Le terme f est appelé coefficient de frottement. Il est caractéristique du contact entre les deux solides (matériaux respectifs, type de surface).

CAS 1.2 Deuxième cas : $\vec{V_g} = \vec{0}$

On va considérer le cas d'un glissement relatif nul ($\vec{V_g} = \vec{0}$).

Dans ce cas, la force $\mathrm{d}\vec{f_t}$ est telle que :

$$\boxed{\mathbf{d}f_t(P, S_2 \rightarrow S_1) \leq f\mathbf{d}f_n(P, S_2 \rightarrow S_1)}$$

On ne peut plus utiliser de vitesse de glissement. On exprime simplement qu'en statique (plus de mouvement relatif) les actions de contact tangentielles sont inférieures (en intensité) au cas limite donné par l'existe d'un glissement.

REMARQUES 1.3

- Si on suppose que la vitesse de glissement peut être quelconque dans le plan tangent, alors on définit le cône de frottement par $f = \tan\phi$ tel que dans le cas de glissement relatif les actions tangentielles se situent sur le cône.
- Le cas d'un contact parfait correspond à un coefficient de frottement nul.

VALEURS NUMERIQUES 1.4

Nature des matériaux	f_s sans	f_s avec	f sans	f avec
Acier sur acier	0,18	0,12	0,15	0,09
Acier sur fonte	0,19	0,1	0,16	0,08 à 0,04
Acier sur bronze	0,11	0,1	0,1	0,09
Téflon sur acier	0,04		0,04	
Fonte sur bronze		0,1	0,2	0,08 à 0,04
Nylon sur acier			0,35	0,12
Bois sur bois	0,65	0,2	0,4 à 0,2	0,16 à 0,04
Métaux sur bois	0.6 à 0,5 0	1	0,5 à 0,2	0,08 à 0,02
Métal sur glace			0,02	
Pneu voiture sur route	0,8		0,6	0,3 à 0,1

FIGURE 1 Valeurs indicatives des coefficients d'adhérence f_s et de frottement f avec ou sans lubrification. Le coefficient f_s correspond en fait à la valeur de f au démarrage du mouvement

2 Cas du contact ponctuel réel

Dans de nombreux cas on a des contacts entre surfaces de type sphère-plan, cylindre-cylindre… et les contacts peuvent être assimilés à des contacts ponctuels (ils se limitent à de petites surfaces). Le torseur des actions de contact exercées par S_2 sur S_1 peut se décomposer en :

$$\{\mathcal{T}\} = \begin{Bmatrix} \vec{F}(S_2 \to S_1) \\ \vec{M}(P, S_2 \to S_1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_n(P, S_1 \to S_2) + \vec{F}_t(P, S_1 \to S_2) \\ \vec{M}_n(P, S_1 \to S_2) + \vec{M}_t(P, S_1 \to S_2) \end{Bmatrix}$$

Les quantités $\vec{F}_n$ et $\vec{F}_t$ représentent les efforts normaux et tangentiels, alors que $\vec{M}_n$ et $\vec{M}_t$ représentent les moments dits de pivotement et de roulement. Les indices n et t se réfèrent au vecteur normal $\vec{n}$ au plan tangent (de contact) et à un vecteur appartenant à ce plan $\vec{t}$.

Le torseur cinématique du mouvement de S_2 par rapport à S_1 s'écrit lui aussi au point P de contact :

$$\{\mathcal{T}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{M}(P, S_2/S_1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_n(2/1) + \vec{\Omega}_t(2/1) \\ \vec{V}_g(P \in 2/1) \end{Bmatrix}$$

On appelle la composante normale du vecteur rotation le vecteur rotation de pivotement et la composante tangentielle vecteur rotation de roulement.

On généralise les lois de COULOMB en introduisant des coefficients de frottement de roulement et de pivotement. En écrivant de la même manière si les vecteurs rotation sont non nuls :

$$\vec{M}_n(P, S_2 \to S_1).\vec{\Omega}_n(S_2/S_1) \leq 0$$

$$M_n(P, S_2 \to S_1) = \delta F_n(S_2 \to S_1)$$

$$\vec{M}_t(P, S_2 \to S_1).\vec{\Omega}_t(S_2/S_1) \leq 0$$

$$\vec{M}_t(P, S_2 \to S_1) \wedge \vec{\Omega}_t(S_2/S_1) = 0$$

$$M_t(P, S_2 \to S_1) = \eta F_t(S_2 \to S_1)$$

Les paramètres η et δ sont homogènes à des longueurs et valent (contact pneu-chaussée) $0{,}01\ \mathrm{m}$. Pour un contact de type roue métallique-rail, on a $0{,}000005\ \mathrm{m}$. On peut se représenter ce paramètre η comme une dimension caractéristique de la surface de contact.