Cours de mécanique du solide

Modélisation des actions mécaniques

Si on considère un solide matériel comme un ensemble de points matériels (c'est-à-dire de points M auxquels on attache une petite quantité de matière $\mathrm{d}m$) on peut écrire que toute action (à distance ou de contact) se résume à un effort représenté par un vecteur. On notera $\mathrm{d}\vec{f}\big(ext \to M(\mathrm{d}m)\big)$ cet effort appliqué au point M dont la masse élémentaire est $\mathrm{d}m$.

DEFINITION 1

Une force se représente par un vecteur lié (attaché au point M).

PRINCIPE 2

On sait que la puissance P, dans le repère R d'un effort $\mathrm{d}\vec{f}$ appliqué en un point M dans une vitesse de déplacement de M notée $\vec{V}(M/R)$ se définit comme le produit scalaire :

$$P\left(\mathrm{d}\vec{f}, \vec{V}(M/R)\right) = \mathrm{d}\vec{f}.\vec{V}(M/R)$$

Comme le champ des vitesses d'un solide est celui donné par le torseur cinématique $\{\mathcal{V}\}$ on définit le torseur statique $\{\mathcal{F}(ext \to S)\}$ des efforts exercés sur un solide S tel que la puissance (par rapport au repère R) de ces efforts dans le champ de vitesse est donnée par le comoment de ces deux torseurs :

$$\boxed{\boldsymbol{P = \{\mathcal{V}\}.\{\mathcal{F}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(S/R) \end{Bmatrix} . \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}(M, \vec{F}) \end{Bmatrix}}}$$

FORMULES 3

- La **résultante** se détermine comme la somme de toutes les actions élémentaires $\mathrm{d}\vec{f}$:

$$\vec{F}(ext \to S) = \int_S \mathrm{d}\vec{f}(ext \to M) \ \forall M \in S$$

- De la même manière on obtient pour le **moment** :

$$\vec{M}(A) = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \mathrm{d}\vec{f}(ext \to M) \ \forall M \in S$$

PREUVE 3

Si on admet que $\vec{F}$ représente bien la résultante des actions élémentaires exercées sur des points M_i du solide S, alors

$$\begin{aligned}\vec{M}(B) &= \sum_i \left[\overrightarrow{BM_i} \wedge \mathrm{d}\vec{f_i}\right] \\ &= \sum_i \left[\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM_i}\right) \wedge \mathrm{d}\vec{f_i}\right] \\ &= \sum_i \left[\overrightarrow{BA} \wedge \mathrm{d}\vec{f_i}\right] + \sum_i \left[\overrightarrow{AM_i} \wedge \mathrm{d}\vec{f_i}\right] \\ &= \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F} + \vec{M}(A)\end{aligned}$$

On trouve donc la relation caractéristique d'un torseur, ce qui était annoncé.