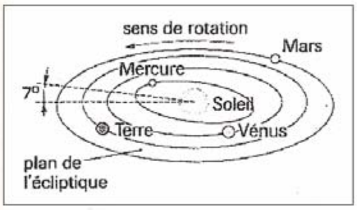
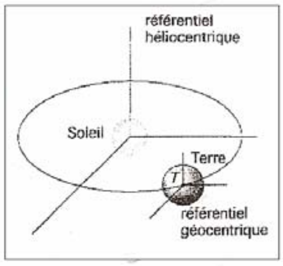
Mouvements des satellites et des planètes

I - Référentiels utilisés



Le Soleil et quelques planètes
le plan de l'orbite de Mercure
fait un angle de 7°C avec
le plan de l'écliptique



Le référentiel héliocentrique et le référentiel géocentrique.

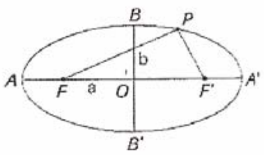
Mouvements des planètes : étudiés dans le référentiel héliocentrique.
Mouvements de satellites naturels et artificiels : étudié dans le référentiel géocentrique.

II - Propriétés du mouvement des planètes

Point mathématiques : Qu'est-ce qu'une ellipse ?

F et F' sont les foyers de l'ellipse ; $AA' = 2a$ est le grand axe et $BB' = 2b$ le petit axe. Tout point P de l'ellipse vérifie l'égalité $PF + PF' = 2a$.

$e = \frac{FF'}{AA'}$ est l'exentricité de l'ellipse. Si $e = 0$, l'ellipse devient un cercle.



Ellipse de foyers F et F'

1) Les lois de Kepler

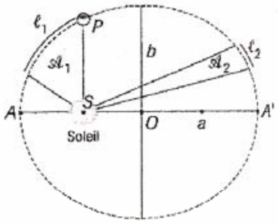
Kepler, (1571 - 1630), astronome allemand, utilise les mesures très précises de Tycho Brahé pour trouver de façon empirique les trois lois qui décrivent le mouvement des planètes.

1ère loi : loi des orbites

Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre d'inertie d'une planète est une ellipse dont le Soleil est un foyer.

2e loi : loi des aires

Le rayon-vecteur $\vec{SP}$ qui relie le centre du Soleil au centre de la planète balaie des aires égales pendant des durées identiques.



Conséquence :

Pour une trajectoire elliptique $A_1 = A_2$ or $l_1 > l_2$

$$\Rightarrow v_1 \cdot \Delta t > v_2 \cdot \Delta t \Rightarrow v_1 > v_2.$$

Conséquence :

Pour une trajectoire circulaire, la valeur de la vitesse est constante au cours du temps.

Preuve :

Le rayon de la trajectoire est constant.

D'après la loi des aires, pendant la durée Δt, l'aire balayée est la même : $A_1 = A_2$

$$\left.\begin{array}{lll} 2\pi & \rightsquigarrow & \pi R^2 \\ \alpha & \rightsquigarrow & A \end{array}\right\} A = \frac{\alpha}{2} \cdot R^2$$ aires d'une portion de cercle

$$\left.\begin{array}{lll} 2\pi & \rightsquigarrow & 2\pi R \\ \alpha & \rightsquigarrow & l \end{array}\right\} l = \alpha \cdot R$$ longueur d'une portion de cercle

$$A_1 = A_2 \Rightarrow \frac{\alpha_1 R^2}{2} = \frac{\alpha_2 R^2}{2} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \frac{l_1}{R} = \frac{l_2}{R} \Rightarrow l_1 = l_2.$$

$$\Rightarrow v_1 \cdot \Delta t = v_2 \cdot \Delta t$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2.$$

3e loi : loi des périodes.

Le rapport du carré de la période de révolution T d'une planète autour du soleil sur le cube du demi-grand axe de l'ellipse est constant.

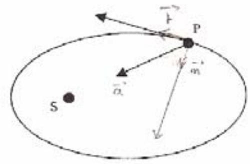
2) Vecteurs vitesse et accélération

Le repère de Frenet :

Deux axes orthogonaux : axe normal : vecteur unitaire $\vec{n}$
axe tangent à la trajectoire : vecteur unitaire $\vec{t}$

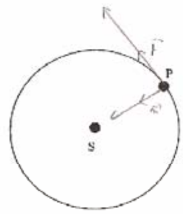
Remarque :
Ce repère est fixe sur le centre d'inertie du système et se déplace avec le système.

Vitesse : $\vec{v}$ tangent à la trajectoire : $\vec{v} = v.\vec{t}$.
Accélération : $\vec{a} = a_t . \vec{t} + a_n . \vec{n}$ $\quad \vec{a} \begin{vmatrix} a_t \\ a_n \end{vmatrix}$



Par définition : dans le repère de Frenet :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$



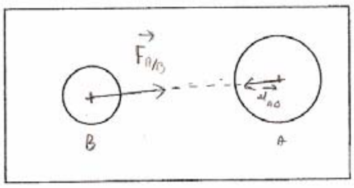
Si le mouvement est circulaire uniforme :
la vitesse est constante $\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{n}$.
Dans ce cas l'accélération est radiale centripète.

III - Applications des lois de Newton à l'étude du mouvement des planètes et des satellites

1) La loi de gravitation universelle (Newton : 1687)

Deux corps de masse M_A et M_B à répartition de masse à symétrie sphérique (masse répartie uniformément) et dont leurs centres sont distants de R (grand devant la taille des corps A et B) exercent l'un sur l'autre une force d'interaction gravitationnelle attractive donnée par :

$$\vec{F}_{A/B} = -G \cdot \frac{M_A \cdot M_B}{R^2} \cdot \vec{u}_{AB}$$



$\vec{u}_{AB}$: vecteur unitaire de A vers B.

G : constante de gravitation universelle.

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ SI.

M_A et M_B : masse des deux corps en kg.

R : distance entre le centre de A et le centre de B en m.

Analyse dimensionnelle de G :

$$[G] = \frac{[F] \cdot [R^2]}{[M_A \cdot M_B]} = \frac{N \cdot m^2}{kg^2} = \frac{kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m^2}{kg^2} = m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$$

2) Etude du mouvement d'une planète autour du Soleil

On considère le mouvement d'une planète de masse m dans le référentiel héliocentrique.

a. Vecteur accélération

Système étudié : planète dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.

Bilan des forces : $\vec{F}_{S/P}$: force d'interaction gravitationnelle exercée par S sur P.

D'après la deuxième loi de Newton

$$\vec{F}_{S/P} = m \cdot \vec{a}_P$$

Or $\vec{F}_{S/P} = -\dfrac{G \cdot M_S \cdot m}{R^2} \cdot \vec{u}_{ST}$ donc $-\dfrac{G \cdot M_S \cdot m}{R^2} \cdot \vec{u}_{ST} = m \cdot \vec{a}_P$

Donc $\vec{a}_P = -\dfrac{G \cdot M_S}{R_2} \cdot \vec{u}_{ST}$

Remarques :
- $\vec{a}_P$ est indépendant de la masse de la planète m.
- cette accélération est radiale centripète.

b. Modélisation du mouvement : expression de la vitesse de la planète

D'après les résultats précédents, on peut modéliser le mouvement de la planète par un mouvement circulaire uniforme. Les observations astronomiques montrent que le mouvement de la plupart des planètes peut être, dans une très bonne approximation, considéré comme circulaire uniforme.

On suppose le mouvement de la planète circulaire, on projette la relation précédente dans le repère de Frenet.

Dans ce repère : $\vec{a_P} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$

Or $\vec{a_P} = -\frac{GM_S}{R^2}\vec{u}_{SP} = \frac{GM_S}{R^2}\vec{n}$. On a donc $\frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n} = \frac{G.M_S}{R^2}.\vec{n}$

Par identification : $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{constante} \Rightarrow$ mouvement uniforme.

$\frac{v^2}{R} = \frac{G.M_S}{R^2}$ d'où $v^2 = \frac{G.M_S}{R}$ d'où $v = \sqrt{\frac{G.M_S}{R}}$

c. Période de révolution de la planète autour du Soleil

- La période de révolution est la durée pour parcourir l'orbite complète.
- $v = \frac{D}{\Delta t}$. Si $\Delta t = T \Rightarrow D = 2\pi R$ (périmètre du cercle) donc $T = \frac{2\pi R}{v}$
- Donc $T = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{G.M_S}{R}}} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{G.M_S}}$ $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G.M_S}}$

d. Preuve de la troisième loi de Kepler.

D'où $T^2 = 4\pi^2\frac{R^3}{G.M_S}$ d'où $\frac{T^2}{R_3} = \frac{4\pi^2}{G.M_S}$

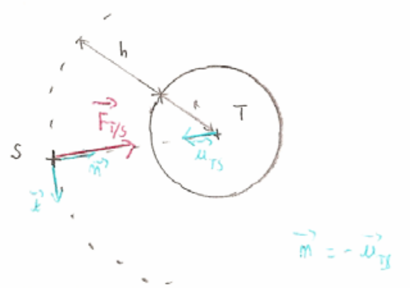
e. Calcul de la masse du Soleil :

Pour la Terre $T = 365,25$ j, $R = 1$ u.a. $= 150 \times 10^6$ km.

$M_S = \frac{R^3 . 4\pi^2}{T^2 \times G} = \frac{(150 \times 10^9)^3 \times 4\pi^2}{(365,25 \times 3600 \times 24)^2 \times 6,67 \times 10^{-11}} = 2 \times 10^{30}$ kg.

3) Etude du mouvement d'un satellite autour de la Terre.

Soit la Station Orbitale Internationale ISS de masse $m = 415$ tonnes évoluant à une altitude $h = 400$ km. On assimile cette station à un point S.



On se place dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen.

Bilan des forces : force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite.

$$\vec{F}_{T/S} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T+h)^2} \cdot \vec{u}_{TS}$$

Le mouvement est plan : deux vecteurs forment un plan : accélération et vitesse.
Le centre de la Terre appartient au plan de la trajectoire car la force est dirigée vers le centre de la Terre.

D'après la deuxième loi de Newton :

$$\vec{F}_{T/S} = m\vec{a}_S \Rightarrow -\frac{G.M_T.m}{(R_T+h)^2}\vec{u}_{TS} = m\,\vec{a}_S \quad \text{d'où} \quad \vec{a}_S = -\frac{G.M_T}{(R_T+h)^2}\cdot\vec{u}_{TS} = \frac{G M_T}{(R_T+h)^2}\cdot\vec{n}$$

Par projection dans le repère de Frenet :

$$\vec{a}_S = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{t} + \frac{v^2}{(R_T+h)}\vec{n} = \frac{G.M_T}{(R_T+h)^2}\cdot\vec{n}$$

Par identification :

$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v$ est constante, le mouvement est uniforme

et $\frac{v^2}{(R_T+h)} = \frac{G.M_T}{(R_T+h)^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G.M_T}{R_T+h}}$

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98.10^{24}}{6380\times10^3+400.10^3}} = 7{,}7\times10^3\ m.s^{-1}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(6380.10^3+400\times10^3)^3}{6{,}67.10^{-11}\times5{,}98.10^{-24}}} = 5{,}6.10^3\,s = 1{,}5\ h.$$

Définition d'un satellite géostationnaire :
Un satellite géostationnaire reste continuellement au-dessus de la verticale du même lieu de l'équateur. Ce satellite est immobile par rapport à la surface de la Terre, c'est-à-dire dans un référentiel terrestre et sa période de révolution est égale à la période propre de rotation de la Terre (T = 23 h 56 min).