Etude théorique de mouvements plans dans le champ de pesanteur uniforme

I - Présentation

On étudie le lancer d'une boule de pétanque, avec une vitesse initiale $\vec{V_0}$
On cherche à établir les équations horaires du mouvement ainsi que l'équation de la trajectoire.

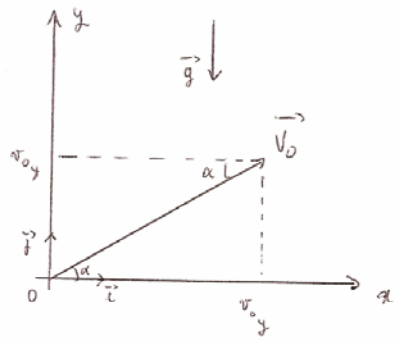
II - Etude théorique

Système étudié : boule
Référentiel : terrestre supposé galiléen
Hypothèses simplificatrices du modèle : on néglige la force d'interaction avec l'air. La seule force exercée est le poids $\vec{P}$.

1) Conditions initiales

Position initiale :
$\vec{OG_0} \left| \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{array} \right.$

Vitesse initiale :
$\vec{v_0} \left| \begin{array}{l} v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha \end{array} \right.$



$\cos\alpha = \frac{adj}{hyp} = \frac{v_{0x}}{v_0}$

2) Coordonnées du vecteur accélération

D'après la deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a_G}$ d'où $\vec{P} = m\vec{a_G} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a_G}$

$\Rightarrow \vec{a_G} = \vec{g}$ $\boxed{\vec{a_G} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array} \right.}$

3) Equations horaires de la vitesse

Or $\vec{a_G} = \frac{d\vec{v_G}}{dt}$ $\left\{ \begin{array}{l} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{array} \right.$ Par intégration de $\vec{a_G}$ on obtient la vitesse $\vec{v}$

$\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = K \\ v_y = -gt + K' \end{array} \right.$

K et K' sont fixées par les conditions initiales sur la vitesse :

$K = v_{0_x} = v_0 \cdot \cos\alpha$; $K' = v_{0_y} = v_0 \cdot \sin\alpha$

D'où les équations horaires des vitesses : $\boxed{\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = v_0 \cdot \cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0 \sin\alpha \end{array} \right.}$

4) Equations horaires de la position

Or $\vec{v}_G = \dfrac{d\vec{OG}}{dt}$ $\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$ Par intégration de $\vec{v}$, on obtient $\vec{OG}$

$\vec{OG} \left| \begin{array}{l} x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t + K_1 \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 . \sin\alpha \cdot t + K'_1 \end{array} \right.$

K_1 et K'_1 sont fixées par les conditions initiales sur la position.

$K_1 = x_0 = 0$; $K'_1 = y_0 = 0$.

D'où les équations horaires de la position : $\boxed{\vec{OG} \left| \begin{array}{l} x = v_0 \cdot \cos\alpha . t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha \, t \end{array} \right.}$

5) Equation de la trajectoire

Equation de la fonction $y = f(x)$:

On élimine le temps t de ces équations : $x = v_0 \cdot \cos\alpha t \Rightarrow t = \dfrac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}$

On injecte t dans l'expression de y : $y = -\frac{1}{2} g \left(\dfrac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \dfrac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}$

d'où $\boxed{y = -\dfrac{g}{2 v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} x^2 + \tan\alpha \cdot x}$ $\Rightarrow$ équation d'une parabole

6) Représentations graphiques associées au modèle théorique.