Principaux résultats d'électromagnétisme

(En vue du cours sur les ondes électromagnétiques dans le vide)

1 Postulats de l'électromagnétisme

- **La force de LORENTZ**

$$\boxed{\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)}$$

- Les **équations de MAXWELL** régissent l'évolution locale du champ électromagnétique dans tout référentiel galiléen.

Equation de MAXWELL-GAUSS

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Equation du flux magnétique

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{B} = 0}$$

Equation de MAXWELL-FARADAY

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Equation de MAXWELL-AMPERE

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

2 Relations de passage

A la traversée d'une nappe séparant deux milieux 1 et 2, portant des charges et des courants surfaciques σ et $\vec{J}_S$, **le champ électromagnétique présente une discontinuité finie** :

$$\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}} \text{ et } \boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1\to 2}}$$

3 Potentiels électromagnétiques

Les équations du flux magnétique et de MAXWELL-FARADAY assurent l'existence d'un **potentiel scalaire V** et d'un **potentiel vecteur $\vec{A}$ non uniques** tels que :

$$\boxed{\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}} \text{ et } \boxed{V = -\overrightarrow{\text{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

4 Approximation des régimes quasi-stationnaires

4.1 Définition et validité de l'ARQS

On appelle **approximation des régimes quasi-stationnaires** (ARQS) l'étude de l'électromagnétisme dans le cas où les **temps de propagation sont négligeables**.
Cette approximation est valable si :

$$\boxed{\frac{d}{c} \ll \tau}$$

d la **dimension caractéristique du problème** (extension géométrique)
c la **célérité des ondes électromagnétiques dans le vide**
τ le **temps caractéristique des variations de la distribution $\{\boldsymbol{\rho}, \vec{\boldsymbol{j}}\}$**

4.2 Propriétés d'un conducteur dans l'ARQS

- **Loi d'OHM**

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}$$

- Le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction :

$$\boxed{\left\|\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\| \ll \|\vec{j}\|}$$

- **Equations de MAXWELL**

Equation de MAXWELL-GAUSS

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Equation du flux magnétique

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{B} = 0}$$

Equation de MAXWELL-FARADAY

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Equation de MAXWELL-AMPERE

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

– Cas des isolants

Dans le cas des isolants $\vec{j} = \vec{0}$ et l'étude peut se faire dans le cadre de l'ARQS. Cependant l'équation de MAXWELL-AMPERE $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ n'est pas utilisable : il faut revenir à l'équation complète et conserver :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

– Equation locale de conservation de la charge

Dans un conducteur dans le cadre de l'ARQS :

$$\boxed{\vec{j} \text{ est à flux conservatif}}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

– Champs et potentiels dans l'ARQS

$$\boxed{\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_D \frac{\vec{j}(P,t)\mathrm{d}\tau}{r_{PM}}}$$

même expression qu'en régime permanent. $\vec{A}$ vérifie

$$\boxed{\Delta\vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}}$$

(si $\mathrm{div}\vec{A} = 0$).

$$\boxed{\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_D \frac{\vec{j}(P,t)\mathrm{d}\tau \wedge \vec{e}_{PM}}{r_{PM}^2}}$$

même expression qu'en régime permanent (la loi de BIOT et SAVART est applicable).

$$\boxed{V(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_D \frac{\rho(P,t)\mathrm{d}\tau}{r_{PM}}}$$

même expression qu'en régime permanent. V vérifie

$$\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

$$\boxed{\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}}$$

même relation qu'en régime permanent.

$$\boxed{V = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

Par rapport au régime permanent, s'ajoute le terme $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

5 Bilan énergétique

Le bilant énergétique traduisant l'évolution de l'énergie du champ électromagnétique contenue dans un volume V délimité par la surface fermée S s'écrit :

- **Sous forme intégrale**

$$\boxed{\iiint_V \frac{\partial w}{\partial t}\mathrm{d}\tau = -\iiint_V \vec{j}.\vec{E}\mathrm{d}\tau - \oiint_S \vec{\Pi}.\vec{n}\mathrm{d}S}$$

- **Sous forme locale**

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{\Pi} + \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{j}.\vec{E} = 0}$$

$$avec$$

- **Vecteur de POYNTING**

$$\boxed{\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}}$$

- **Densité volumique d'énergie électromagnétique**

$$\boxed{w = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2}$$

❖ ❖ ❖