Exercice d'électromagnétisme

Propagation de la lumière

ENONCE

Dans le vide, on considère les champs électrique et magnétique :

$$\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)\,\vec{e}_z$$

et

$$\vec{B} = B_0 \cos(kx - \omega t)\,\vec{e}_y$$

On rappelle deux des équations de MAXWELL dans le vide :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

et

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

QUESTION 1 Déterminer φ et B_0 pour obtenir une onde plane. On suppose désormais cette condition vérifiée.

QUESTION 2 Exprimer le vecteur de POYNTING : $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \wedge \vec{B}$ et sa valeur moyenne dans le temps.

QUESTION 3 On utilise un cadre de côté a. Comment le placer pour que le flux lumineux y soit maximum.

Solution

QUESTION 1

Etant donné que $\vec{B} = B_0 \cos(kx - \omega t)\,\vec{e}_y = B_y \vec{e}_y$, son rotationnel vaut :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z = \frac{\mathrm{d}B_y}{\mathrm{d}x}\,\vec{e}_z$$

$$= -kB_0 \sin(kx - \omega t)\,\vec{e}_z$$

Aussi, les équations de MAXWELL conduisent à :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

d'où :

$$-kB_0 \sin(kx - \omega t)\,\vec{e}_z = \frac{1}{c^2}.\,\omega E_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)\,\vec{e}_z$$

avec $\omega = kc$. C'est pourquoi :

$$kB_0 = \frac{1}{c^2}.\,kcE_0$$

d'où :

$$\boxed{\boldsymbol{B_0 = \frac{E_0}{c}}}$$

et d'autre part :

$$-\sin(kx - \omega t) = \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

d'où :

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi = \pi}}$$

QUESTION 2

Soient $E_z = E_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) = -E_0 \cos(kx - \omega t)$ et $B_y = B_0 \cos(kx - \omega t)$ les composantes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à partir desquelles se calcule le vecteur de POYNTING :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \wedge \vec{B}$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}E_z B_y \vec{e}_x$$

$$= \frac{1}{\mu_0}.\,E_0 \cos(kx - \omega t)\,.\,B_0 \cos(kx - \omega t)\,\vec{e}_x$$

$$\underbrace{=}_{\text{car } B_0 = \frac{E_0}{c}} \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(kx - \omega t)\,\vec{e}_x$$

$$= \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}[1 + \cos(2kx - 2\omega t)]\vec{e}_x$$

Aussi sa valeur moyenne s'écrit-elle :

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}[1 + \langle\cos(2kx - 2\omega t)\rangle]\vec{e}_x$$

avec :

$$\langle\cos(2kx - 2\omega t)\rangle = 0$$

d'où :

$$\boxed{\langle\vec{\boldsymbol{\Pi}}\rangle = \frac{\boldsymbol{E_0^2}}{\boldsymbol{2\mu_0 c}}\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}}$$

QUESTION 3

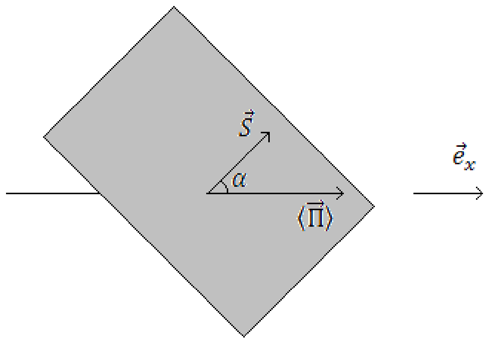

FIGURE 1

Soit α l'angle entre $\langle\vec{\Pi}\rangle$ et le vecteur surface $\vec{S}$ de norme $S = a^2$. Le flux de $\langle\vec{\Pi}\rangle$ à travers S est défini par :

$$\Phi = \langle\vec{\Pi}\rangle.\vec{S} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\vec{e}_x.\vec{S} = \frac{E_0^2 a^2}{2\mu_0 c}\cos\alpha$$

Ce flux est maximum lorsque α est nul ; il vaut alors :

$$\boxed{\boxed{\boldsymbol{\Phi_{\max}} = \frac{\boldsymbol{E_0^2 a^2}}{\boldsymbol{2\mu_0 c}}} \text{ pour } \boxed{\boldsymbol{\alpha = 0}}}$$

❖ ❖ ❖