Exercice d'électromagnétisme

Quelques généralités sur les plasmas

D'après Centrale PSI 2004 Physique I

ENONCE

Les plasmas sont des milieux macroscopiquement neutres, partiellement ou totalement ionisés. Naturels ou artificiels, on les rencontre sous de nombreuses formes : arcs et décharges électriques, foudres, vent solaire, ionosphère, étoiles, lasers à gaz… On se propose d'étudier dans cet exercice certaines propriétés générales des plasmas.

On donne le laplacien en coordonnées sphériques d'une fonction $f(r)$:

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2\big(rf(r)\big)}{\partial r^2}$$

Données numériques :

Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}\ \mathrm{F.m^{-1}}$
Constante de BOLTZMANN	$k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J.K^{-1}}$
Charge élémentaire	$e = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
Constante de PLANCK	$h = 6{,}62 \times 10^{-34}\ \mathrm{J.s}$
Nombre d'AVOGADRO	$N_A = 6{,}02.10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Energie d'ionisation de l'atome d'Argon	$E_{ion} = 15{,}7\ \mathrm{eV}$
Masse molaire de l'argon	$M = 39{,}9\ \mathrm{g.mol^{-1}}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8{,}31\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3{,}00 \times 10^{8}\ \mathrm{m.s^{-1}}$

On considère un plasma d'argon contenant, en **moyenne et par unité de volume**, n_e électrons libres de masse m_e et de charge $-e$, $n_i = n_e$ ions Ar^+ de masse m_i et n_0 atomes Ar de masse m_0. On définit le degré d'ionisation de ce plasma par le rapport

$$\alpha = \frac{n_e}{n_e + n_0}$$

On considère d'autre part que le plasma est en équilibre thermodynamique local, ce qui permet de définir la température thermodynamique T de ce plasma.

1 Etude de l'écart local à la neutralité : longueur de DEBYE

Considérons un ion argon Ar^+ particulier, placé en O, et pris comme origine. Du fait de l'attraction Coulombienne, au voisinage de cet ion, on observe un surplus de charge négative, responsable d'un écart local à la neutralité globale du plasma. Soit $V(r)$ le potentiel qui règne en un point M situé à la distance r de l'ion Ar^+ situé en O (l'origine des potentiels est prise à l'infini). Les densités volumiques d'ions et d'électrons en M s'écrivent respectivement :

$$n_+ = n_e \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \text{ et } n_- = n_e \exp\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right)$$

avec k_B la constante de BOLTZMANN.

QUESTION *1.* **1** Quelle(s) remarque(s) vous suggère(nt) les expressions de n_+ et n_- ? Quel nom donne-t-on usuellement à ces lois de répartition ?

QUESTION *1.* **2**

a) Donner l'expression de la densité volumique totale de charges au point M, $\rho_c(r)$, pour $r \neq 0$.
b) Quelle est l'équation locale satisfaite en M par le potentiel $V(r)$?
c) On se place dorénavant dans l'hypothèse $eV(r) \ll k_B T$. Simplifier l'équation obtenue à la QUESTION *1.* **2** b), et la résoudre en introduisant la fonction $u(r) = rV(r)$. On introduira pour cela deux constantes d'intégration A_1 et A_2.
d) On admet que $V(\infty) = 0$ et qu'au voisinage immédiat de l'ion Ar^+, l'influence de sa charge, supposée ponctuelle, l'emporte sur celle des charges électroniques distribuées en volume. Déterminer les constantes A_1 et A_2. Donner ensuite l'expression du potentiel $V(r)$ en fonction de e, ε_0 permittivité diélectrique du vide, r, et d'une distance caractéristique λ_D (appelée longueur de DEBYE) que l'on explicitera en fonction de ε_0, k_B, T, n_e et e. Commenter le résultat obtenu.

QUESTION *1.* **3** En déduire la densité volumique totale de charge $\rho_c(r)$ en $r \neq 0$, puis la charge totale $Q(r)$ (y compris la charge ponctuelle centrale) contenue dans une sphère de centre O et de rayon r en fonction de e, λ_D et r. Discuter les cas $r \to 0$ et $r \to \infty$. Conclure.

QUESTION *1.* **4** *Application numérique*
On donne pour ce plasma d'argon d'Argon $n_e = 3{,}0 \times 10^{21}\ \mathrm{m}^{-3}$. Calculer la valeur numérique de λ_D à la température de $1000\ \mathrm{K}$, puis de $10000\ \mathrm{K}$. Discuter la validité de l'approximation faite à la QUESTION *1.* **2** c).

2 Comportement collectif d'un plasma : pulsation plasma

Tout gaz ionisé dont la dimension caractéristique est grande devant la longueur de DEBYE λ_D est dominé par les effets collectifs induits par la charge d'espace, effets qui viennent masquer les comportements individuels étudiés dans la partie **1**. Pour illustrer le comportement collectif, qui se manifeste notamment lorsqu'on observe ses fluctuations autour de l'équilibre, on s'intéresse à une boule de plasma de centre O et de rayon R, qu'on considèrera comme la superposition de deux fluides incompressibles : un fluide d'électrons, susceptible de se mouvoir, et un fluide d'ions qu'on suppose au repos (les densités ioniques et électroniques des deux fluides précédents sont considérés comme uniformes). On admet qu'à l'instant t, le gaz d'électrons s'est déplacé radialement et qu'il occupe une région de l'espace comprise entre deux sphères, une sphère de rayon $r_0(t)$, et une sphère de rayon $R + r_1(t)$, avec $r_1(t)$ très petit devant R (voir FIGURE 1).

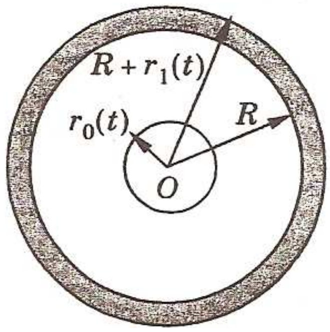

FIGURE 1

QUESTION *2.* **1** Sachant que le fluide d'électrons est supposé incompressible, quelle est la relation qui relie $r_0(t)$ à $r_1(t)$ et R ?

QUESTION *2.* **2** On considère un électron de ce fluide, situé au point M à la distance r de O, avec $r \in [r_0, R]$. Déterminer, en fonction de e, n_e, r, ε_0 et $r_0(t)$ puis de e, n_e, R, r, ε_0 et $r_1(t)$, le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ régnant en M à l'instant t. En déduire la force électrique s'exerçant sur l'électron situé en M.

QUESTION *2.* **3** Un électron, évoluant à la distance moyenne R du point O, possède à l'instant t le vecteur $\dot{r_1}(t)\vec{u}_r$. De même, le vecteur vitesse d'un électron oscillant autour du point M précédent est $\vec{v}(r,t) = v(r,t)\vec{u}_r$. En utilisant l'incompressibilité du gaz d'électrons, écrire la relation existant entre la vitesse $v(r,t)$ de l'électron $\dot{r_1}(t)$, r et R.

QUESTION *2.* **4** Déduire des deux questions précédentes l'équation différentielle satisfaite par $r_1(t)$. Mettre en évidence l'existence d'une pulsation ω_p caractéristique de ce comportement collectif, appelée pulsation plasma, dont on donnera l'expression en fonction de n_e, e, m_e et ε_0.

QUESTION *2.* **5** Quel phénomène vient en pratique amortir les oscillations collectives du plasma ?

QUESTION *2.* **6** Calculer, pour un plasma d'argon de densité électronique $n_e = 3{,}0 \times 10^{21}\ \mathrm{m}^{-3}$ à la température de 10000 K, la valeur de la pulsation plasma ω_p. En réalité, à un éventuel mouvement pulsatoire collectif, radial, se superpose le mouvement désordonné du plasma, dû à l'agitation thermique de ses constituants. L'ordre de grandeur de la section efficace moyenne σ_{eff} lors d'une collision élastique ion-électron est de 5×10^{-17} m². On donne d'autre part l'expression de la valeur moyenne du module de la vitesse d'un électron :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m_e}}$$

Compte tenu de ces valeurs, le mouvement collectif peut-il être mis en évidence ?

⋆ ⋆ ⋆

Solution

1 Etude de l'écart local à la neutralité : longueur de DEBYE

QUESTION 1.1

$$n_+ = n_e \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_BT}\right) \text{ et } n_- = n_e \exp\left(\frac{eV(r)}{k_BT}\right)$$

Les densités n_+ et n_- sont proportionnelles à $e^{-\frac{E}{k_BT}}$ avec $E = E_p = qV$ l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle q placée en un point de potentiel V.

Elles obéissent à la loi de BOLTZMANN.

QUESTION 1.2

a)

$$\boxed{\boldsymbol{\rho_c(r) = en_+ - en_- = -2en_e \,\mathrm{sh}\left(\frac{eV(r)}{k_BT}\right)}}$$

b)

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

soit ici

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\big(rV(r)\big) = \frac{2en_e}{\varepsilon_0}\,\mathrm{sh}\left(\frac{eV(r)}{k_BT}\right)}}$$

c)

$$eV \ll k_BT$$

d'où

$$\mathrm{sh}\left(\frac{eV}{k_BT}\right) \# \frac{eV}{k_BT}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rV) - \frac{2n_e e^2}{\varepsilon_0 k_B T}(rV) = 0$$

On cherche des solutions de la forme $rV = \lambda \exp(sr)$.

Equation caractéristique :

$$s^2 - \frac{2n_e e^2}{\varepsilon_0 k_B T} = 0$$

D'où

$$\boxed{V = \frac{1}{r}\left[A_1 e^{\sqrt{\frac{2n_e e^2}{\varepsilon_0 k_B T}}r} + A_2 e^{-\sqrt{\frac{2n_e e^2}{\varepsilon_0 k_B T}}r}\right]}$$

d)

$$\lim_{r\to+\infty} V(r) = 0$$

d'où

$$A_1 = 0$$

$$\lim_{r\to 0} V(r) = \frac{A_2}{r} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

d'où

$$A_2 = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{V(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\sqrt{\frac{2n_e e^2}{\varepsilon_0 k_B T}}r}}$$

L'exponentielle contenue dans $V(r)$ montre que $\sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{2n_e e^2}}$ est homogène à une longueur.

En posant $\boxed{\lambda_D \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{2n_e e^2}}}$**, on a** $\boxed{V(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}}}$.

Le coefficient $\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)$ traduit l'écrantage des charges ⊖ sur la charge ⊕ de l'ion central Ar^+. Les charges ⊖ sont plus nombreuses que les charges ⊕ au voisinage de l'ion Ar^+ à cause des expressions de n_+ et n_- (ou tout simplement parce que ⊕ attire ⊖).

QUESTION 1.3

$$\rho_c(r) = -2en_e\frac{eV}{k_BT} = -\frac{2n_ee^2}{k_BT}\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\,e^{-r\lambda_D}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\rho_c(r) = -\frac{e}{4\pi r\lambda_D^2}e^{-\frac{r}{\lambda_D}}}}$$

$$Q(r) = \int_0^r \rho_c(r')4\pi r'^2\mathrm{d}r' + e = -\frac{e}{4\pi}\int_0^r \frac{r'}{\lambda_D}\,e^{-\frac{r'}{\lambda_D}}\mathrm{d}\left(\frac{r'}{\lambda_D}\right) = e$$

$$\boxed{\boldsymbol{Q(r) = e\left(1+\frac{r}{\lambda_D}\right)e^{-\frac{r}{\lambda_D}}}}$$

$$\lim_{r\to+\infty} Q(r) = 0$$

est satisfaisant puisque le plasma est neutre.

$$\lim_{r\to 0} Q(r) = 0$$

est satisfaisant puisque lorsque $r \to 0$, la sphère de rayon r ne contient plus que l'ion Ar^+ situé en O.

QUESTION 1.4

$$\boxed{\text{A } \boldsymbol{T = 1000\ K, \lambda_D = 2,8.10^{-8}\ m} \text{ et à } \boldsymbol{T = 10000\ K, \lambda_D = 8,9.10^{-8}\ m}.}$$

$r \ll \lambda$ correspondant à des dimensions atomiques, incompatible avec le point de vue macroscopique précédent, regardons si en $r = \lambda_D$, $eV \ll k_BT$:

- à 1000 K : $eV(r=\lambda_D) = 3{,}0.10^{-21}$ J et $k_BT = 1{,}38.10^{-20}$ J :

$$\boxed{\boldsymbol{eV \ll k_BT} \textbf{ est juste vérifié}}$$

- à 10000 K : $eV(r=\lambda_D) = 9{,}5.10^{-22}$ J et $k_BT = 1{,}38.10^{-19}$ J :

$$\boxed{\boldsymbol{eV \ll k_BT} \textbf{ est vérifié}}$$

Comme $V = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)$ est une fonction décroissante de r, en calculant sa dérivée,

$$\boxed{\boldsymbol{eV \ll k_BT} \textbf{ est } \textbf{\textit{a fortiori}} \textbf{ vérifiée pour } \boldsymbol{r \gg \lambda_D}}$$

2 Comportement collectif d'un plasma : pulsation plasma

QUESTION 2.1

Le gaz d'électrons étant incompressible, il occupe un volume constant d'où :

$$\frac{4}{3}\pi(R+r_1)^3 - \frac{4}{3}\pi r_0^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$r_0^3 = (R+r_1)^3 - R^3$$

$$r_1 \ll R$$

d'où

$$(R+r_1)^3 = R^3\left(1+\frac{r_1}{R}\right)^3 = R^3\left(1+\frac{3r_1}{R}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{r_0^3 = 3R^2 r_1}}$$

QUESTION 2.2

Par symétrie sphérique, $\vec{E}(M,t) = E(r,t)\vec{u}_r$. D'après le théorème de GAUSS, valable en régime variable, on a :

$$4\pi r^2 E(r,t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_+ + \left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r_0^3\right)\rho_-\right]$$

$$\rho_+ = n_e e, \rho_- = -n_e e$$

$$4\pi r^2 E(r,t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r_0^3 n_e e$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\boldsymbol{\vec{E} = \frac{n_e e}{3\varepsilon_0}\frac{r_0(t)^3}{r^2}\vec{u}_r = \frac{n_e e R^2}{\varepsilon_0}\frac{r_1(t)}{r^2}\vec{u}_r} \\ \textbf{force subie par l'électron situé en } \boldsymbol{M : \ \vec{f} = -e\vec{E}}\end{array}}$$

QUESTION 2.3

Par incompressibilité du gaz d'électrons, il y a toujours la même masse d'électrons entre les sphères de rayon r et R. Donc la masse d'électrons qui traverse la sphère de rayon r dans le sens de $\vec{u}_r$ est égale à la masse d'électrons qui traverse la sphère de rayon R dans le même sens.

Soit :

$$m_e n_e 4\pi r^2 v(r,t) = m_e n_e 4\pi R^2 \dot{r}_1(t)$$

$$\boxed{v(r,t) = \frac{R^2}{r^2}\,\dot{r}_1(t)}$$

QUESTION 2.4

On applique la relation fondamentale de la dynamique pour un électron :

$$m_e\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E}$$

Mais

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}$$

et

$$\vec{v} = \frac{R^2}{r^2}\dot{r}_1(t)\vec{u}_r$$

$$r_1 \ll R$$

Donc v est un infiniment petit d'ordre 1.

Donc $(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}$ est d'ordre 2 et $m_e\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E}$

$$m_e\frac{R^2}{r^2}\ddot{r}_1 = -\frac{n_e e^2 R^2}{\varepsilon_0}\frac{r_1}{r^2}$$

$$\boxed{\boxed{\ddot{r}_1 + \omega_p^2 r_1 = 0} \text{ avec } \boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e\varepsilon_0}}}}$$

QUESTION 2.5

En pratique, les oscillations sont amorties par les chocs subis par l'électrons. Ils sont classiquement modélisés par une **force de frottement visqueux** en

$$\boxed{-\frac{m_e}{\tau}\vec{v}}$$

QUESTION 2.6

$$\boxed{\omega_p = 3,1.10^{12}\ \mathrm{rad.s^{-1}}}$$

Pour que le mouvement oscillatoire précédent soit observable, il ne faut pas qu'il soit trop amorti par les chocs.

Il ne faut donc pas que les chocs soient trop nombreux pendant la durée caractéristique des oscillations, soit $\tau = \frac{2\pi}{\omega_p}$.

Déterminons leur nombre pendant cette durée τ.

Soit un électron de vitesse microscopique $\vec{v} = v\vec{e}_x$ dans le repère du laboratoire.

Les ions Ar^+ peuvent être considérés comme immobiles à cause de leur masse. Entre t et $t + \mathrm{d}t$, les ions Ar^+ que l'électron percute sont ceux situés dans un cylindre de base σ_{eff}, de longueur $\bar{v}\mathrm{d}t$.

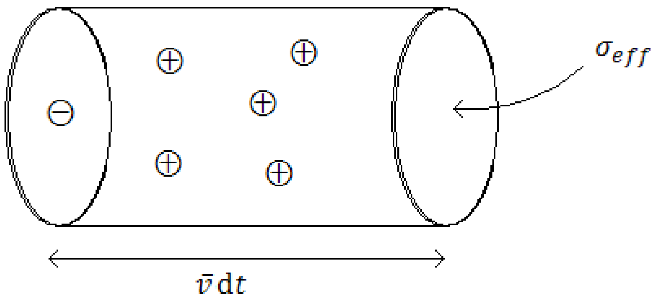

FIGURE A

Ils sont au nombre de

$$\mathrm{d}N = n_i\sigma_{eff}\bar{v}\mathrm{d}t = n_e\sigma_{eff}\bar{v}\mathrm{d}t \; (n_i = n_e)$$

$$\boxed{\Delta N = n_e\sigma_{eff}\sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m_e}}\tau = 0,19 \text{ chocs pendant } \tau = \frac{2\pi}{\omega_p}}$$

$$\boxed{\Delta N \ll 1 : \text{ le mouvement oscillatoire est observable}}$$

❖ ❖ ❖