Cours d'électromagnétisme

Chapitre 1

Rappels et compléments d'électrostatique

Table des matières

❖ ❖ ❖

1 Distributions de charges

Contenu : permittivité du vide – distribution volumique de charges – distribution surfacique de charges – distribution linéique de charges

DEFINITION *1.* 1 Permittivité du vide

On s'intéresse à des charges ponctuelles dans le vide, de *permittivité* ε_0.

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 \text{ SI}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}\ \mathrm{F.m^{-1}}}}$$

DEFINITION *1.* 2 Distribution volumique de charges

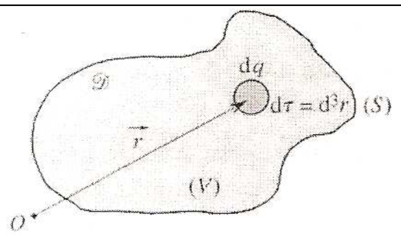

FIGURE 1 Distribution volumique de charges

Dans le cas d'une *distribution volumique de charges* (FIGURE 1), si l'on a un grand nombre de charges par mètre cube, on peut définir une grandeur (moyenne) macroscopique telle que :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dq}{d\tau} = \rho(M)}\ (\mathrm{C.m^{-3}})}$$

Soit un ensemble de charges d'espèces de type k de charge individuelle q_k. Il y a $n_k(\vec{r})$ particules par mètre cube :

$$\boxed{\boldsymbol{\rho(M) = \sum_k q_k n_k}}$$

1° Exercice résolu

Soit un plasma composé d'ions de charge $+q$ (n_0 ions par mètre cube supposés fixes dans $\mathcal{R}_L$ et d'électrons de charge $-q$ (n_{e^-} électrons par mètre cube).

1° En l'absence de perturbation électrique, on a *électroneutralité locale.* Calculer $n_{e^-}{}^0$, le nombre d'électrons par mètre cube.

2° En présence d'une perturbation électrique, les e^-se trouvent au voisinage d'un plan $x = cte$, se déplacent de $\xi(x)$. Exprimer $\rho(x)$.

Solution

1° Puisque $\rho(M) = 0 = n_0 q + n_{e^-}{}^0(-q)$, on en déduit $n_{e^-}{}^0 = n_0$.

2° $\rho(x) = n_0 q - q n_{e^-}(x)$
Avant perturbation, dans le volume Sdx, on a $n_0(-q)Sdx$ C ou $n_0 Sdx$ électrons.
Après perturbation, ce domaine a changé de taille.

$\left[x + dx + \xi(x+dx) - \left(x + \xi(x)\right)\right]S$ est le nouveau volume.

$$Sdx\left[1 + \frac{d\xi}{dx}dx\right]$$

$n_0 Sdx = n_{e^-}(x)Sdx[1 + \xi'(x)dx]$, d'où :

$$n_{e^-}(x) = \frac{n_0}{1 + \underbrace{\frac{d\xi(x)}{dx}}_{\text{petit}}} \underset{\text{DL}}{\approx} n_0\left[1 + \frac{d\xi(x)}{dt}\right]$$

$$\boldsymbol{\rho(x) = n_0 q \frac{d\xi(x)}{dx}}$$

Si ξ dépend du temps :

$$\boldsymbol{\rho(x,t) = n_0 q \frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}}$$

DEFINITIONS *1*. **3** Autres distributions macroscopiques

- Distribution surfacique :

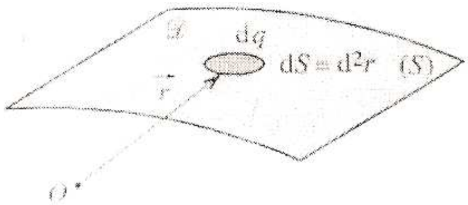

FIGURE **2** Distribution surfacique de charges

Dans le cas d'une *distribution surfacique de charges* (FIGURE **2**) :

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{dq}}{\boldsymbol{dS}} = \boldsymbol{\sigma(M)}\ (\mathrm{C.m^{-2}})}$$

- Distribution linéique :

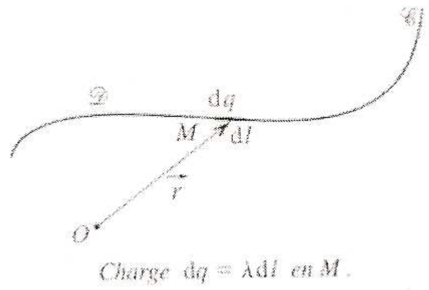

FIGURE 3 Distribution linéique de charges

Dans le cas d'une *distribution linéique de charges* (FIGURE 3) :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dq}{dl} = \lambda(M)} \ (\mathrm{C.m^{-1}})}$$

REMARQUE 1.4

Notons que ces dernières distributions correspondent à des distributions volumiques particulières.

2° Exercice résolu

$\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{|z|}{a}}$. Calculer le champ électrostatique en tout point.

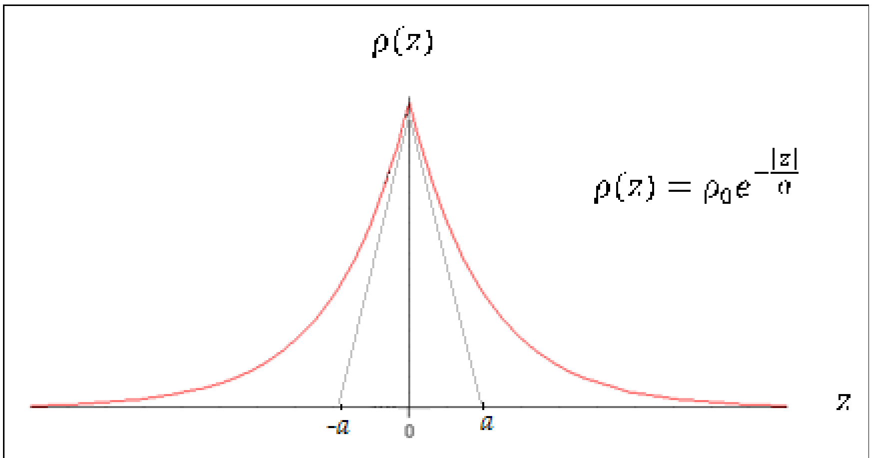

FIGURE 4 Représentation de $\rho(z)$

Solution

Utilisation des plans de symétrie[1] et d'antisymétrie[2] :

[1] Le champ $\vec{E}(M)$ est contenu dans un plan de symétrie (noté Π^+) contenant M.
[2] Le champ $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire au plan d'antisymétrie (noté Π^-) contenant M.

Le plan (xOy) est un plan de symétrie pour la distribution de charges (FIGURE 5) alors $\vec{E}(P') = \mathrm{sym}_\Pi\left(\vec{E}(P)\right)$.

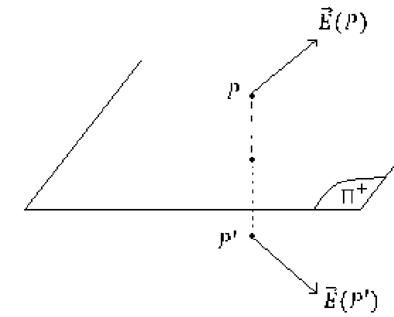

FIGURE 5 Plan de symétrie pour la distribution de charges

Ici, $E(z) = -E(-z)$.

Dépendance fonctionnelle de $E(M)$ (mesure algébrique) :

$\mathcal{D}_\rho$ est invariante par translation dans les directions xx' et yy', en conséquence : $E(x, y, z) = E(z)$.

Application du théorème de GAUSS :

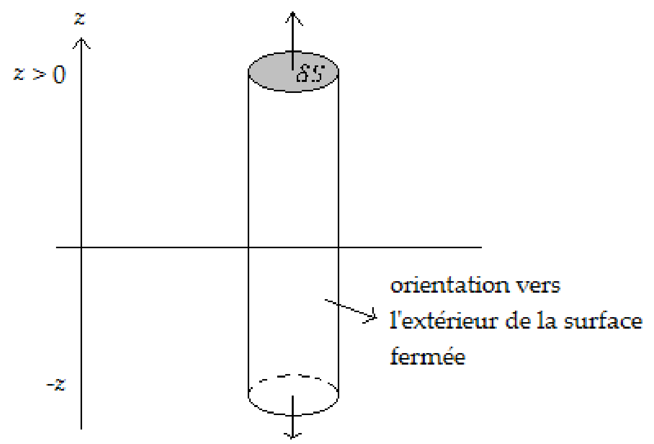

FIGURE 6 Choix de la surface de GAUSS

$$\oiint_S \vec{E}.\vec{n}dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E}.\vec{n}dS = 0$$

$$\iint_{S_1} \vec{E}.\vec{u_z}dS = E(z)\delta S$$

$$\iint_{S_2} \vec{E}.(-\overrightarrow{u_z})dS = -E(-z)\delta S$$

Si $z > 0$, $2E(z)\delta S = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{2}{\varepsilon_0}\int_0^z \rho(z)\underbrace{\delta S dz}_{d\tau}$ avec $\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{z}{a}}$ (ici $z > 0$ donc $|z| = z$).

$$\boldsymbol{E(z) = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\left(1 - e^{-\frac{z}{a}}\right)}$$

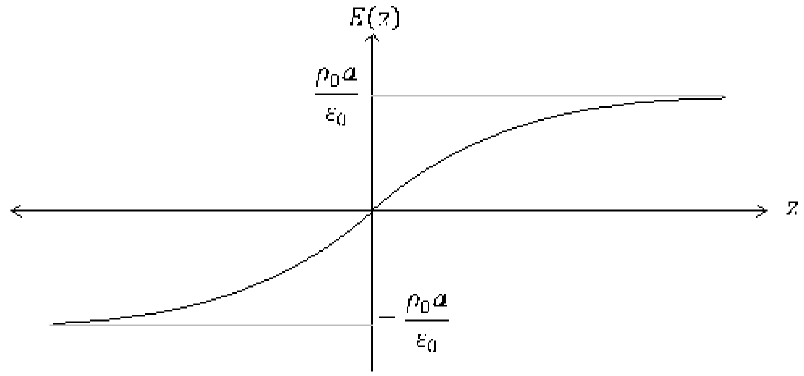

FIGURE 7 Valeur du champ électrostatique en fonction de z

Complément :
Que peut-on dire si on ne mesure les champs qu'à une grande distance par rapport à a ?

On peut dans ce cas remplacer la distribution volumique par une distribution surfacique :

$$\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\boldsymbol{\sigma = 2\rho_0 a}$$

On peut retrouver σ directement : d'un modèle à l'autre (volumique ou surfacique), la charge doit être conservée.

$$\delta S \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 e^{-\frac{|z|}{a}} dz = \delta S \sigma = 2\delta S \int_0^{\infty} \rho_0 e^{-\frac{z}{a}} dz$$

D'où $\sigma \delta S = 2\rho_0 a \delta S$ puis :

$$\boldsymbol{\sigma = 2\rho_0 a}$$

2 Rappels sur le champ électrostatique $\vec{E}$

Contenu : champ électrostatique – loi de COULOMB – interaction électrostatique – additivité des champs

DEFINITION 2. 1 Champ électrostatique

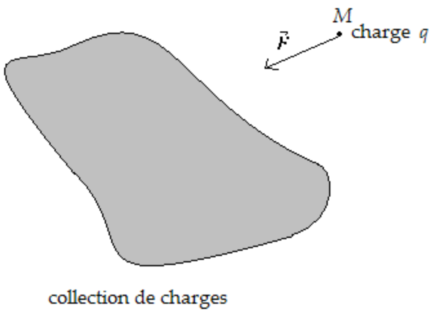

FIGURE 8 Collection de charges et charge ponctuelle

Le *champ* $\vec{E}$ en M est (FIGURE 8):

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}}{q}\ (\mathrm{V.m^{-1}})}$$

LOI 2. 2 Loi de COULOMB (1785)

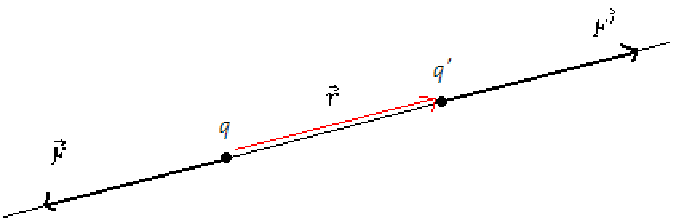

FIGURE 9 Interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles

On considère deux charges ponctuelles, $\vec{F'}$ est la force exercée par q sur q' (FIGURE 9). On a :

$$\boxed{\vec{F'} = \vec{u_r}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^3}\vec{r} = -\vec{F}\ (\mathrm{N})}$$

REMARQUE 2. 3 Additivité des champs

L'additivité des forces implique l'additivité des champs.

❖ ❖ ❖

3 Relations locales pour $\vec{E}$

Contenu : théorème de GAUSS – théorème d'OSTROGRADSKI – première relation locale – nabla – circulation – théorème de STOKES – rotationnel – seconde relation locale – lignes de champ

3.1 Première relation locale

Soit une répartition volumique de charges électriques $\rho(M)$.

THEOREME *3.1.* **1** Théorème de GAUSS

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}.\vec{n}dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$$

$$\oiint_S \vec{E}.\vec{n}dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\mathcal{D}} \rho(M)d\tau$$

Avec le théorème d'OSTROGRADSKI[3],

$$\iiint_{\mathcal{D}} \left(\text{div}\vec{E}(M) - \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}\right)d\tau = 0$$

pour tout domaine $\mathcal{D}$ choisi. On a alors la première relation locale :

THEOREME *3.1.* **2** Première relation locale

$$\boxed{\text{div}\vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}}$$

REMARQUE *3.1.* **3** Nabla

On note $\vec{\nabla}$, « nabla », défini par :

$$\vec{\nabla}\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial \text{x}}\overrightarrow{u_x}\\ \dfrac{\partial}{\partial \text{y}}\overrightarrow{u_y}\\ \dfrac{\partial}{\partial \text{z}}\overrightarrow{u_z}\end{cases}$$

On a :

$$\text{div}\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E}$$

[3] $\oiint_S \vec{A}.\vec{n}dS = \iiint_V \text{div}\vec{A}d\tau$.

3.2 Seconde relation locale

THEOREME *3.2* **1**

Soit $\mathcal{C}$ un contour arbitraire (ne se coupant pas).

$$W = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F}.\overrightarrow{dl} = 0 \xrightarrow[\text{avec } \vec{F}=q\vec{E}]{} \boxed{\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\vec{E}.\overrightarrow{dl} = 0}}$$

La *circulation* sur tout contour fermé d'un champ électrostatique est nulle.

THEOREME *3.2* **2** Théorème de STOKES

En utilisant le théorème de STOKES :

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\vec{A}(M).\overrightarrow{dl}} = \iint_S \boldsymbol{\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\right].\vec{n}dS}}$$

$\iint_S \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\right].\vec{n}dS$ est le flux à travers une surface S orientée (selon la règle du tire-bouchon de MAXWELL) d'un nouveau champ vectoriel : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}$, « *rotationnel* de $\vec{A}$ ».

OUTILS MATHEMATIQUES *3.2* **3** Contenu du rotationnel de $\vec{A}$

En coordonnées cartésiennes[4] :

$$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}(x,y,z)} \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}A_z - \dfrac{\partial}{\partial z}A_y \\ \dfrac{\partial}{\partial z}A_x - \dfrac{\partial}{\partial x}A_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x}A_y - \dfrac{\partial}{\partial y}A_x \end{cases}}$$

REMARQUE *3.2* **4**

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

THEOREME *3.2* **5** Seconde relation locale

Puisque, pour tout contour $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^3$, $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = 0$ et d'après STOKES :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\right].\vec{n}dS$$

[4] L'expression du rotationnel de $\vec{A}$ en coordonnées cartésiennes est à connaître.

il en résulte :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{E}(M) = \vec{0} \ \forall M \in \mathbb{R}^3}$$

3.3 Lignes et tubes de champ

DEFINITION 3.3 1 Lignes de champ

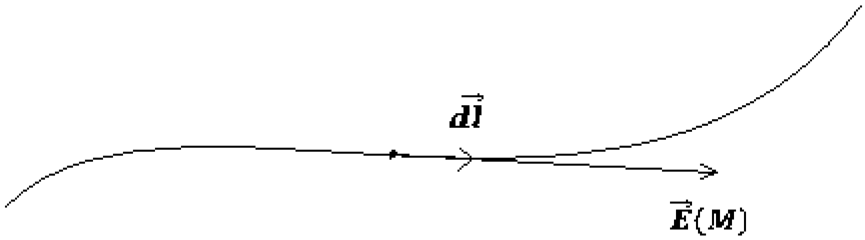

FIGURE 10 Ligne de champ

Une *ligne de champ* (FIGURE **10**) est une courbe telle qu'en chacun de ses points, le champ $\vec{E}$ lui est tangent.

3° **Exercice résolu**
Cas d'un dipôle de moment électrique dipolaire $\vec{p} = p\overrightarrow{u_z}$. Etablir l'équation des lignes de champ (l'objet est ponctuel).

Solution

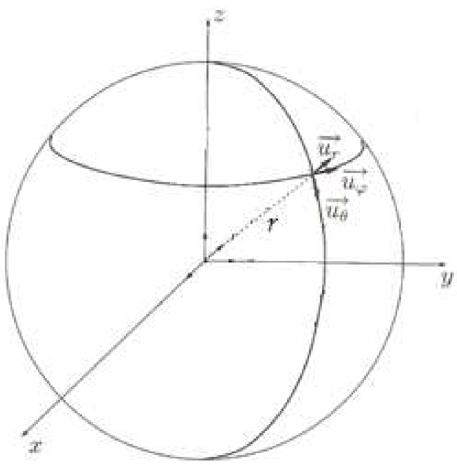

FIGURE 11 Représentation du problème

$$\vec{E}\begin{cases}\overrightarrow{u_r}E_r = \vec{?}\\ \overrightarrow{u_\theta}E_\theta = \vec{?}\\ \overrightarrow{u_\varphi}E_\varphi = \vec{0}\end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} E_r = \dfrac{2p}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sin\theta}{r^3} \end{cases}$$

$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta}, \frac{dr}{r} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta} d\theta = 2\frac{d(r\sin\theta)}{\sin\theta}$ d'où :

$$\boldsymbol{r = r_0(\sin\theta)^2}$$

REMARQUE *3.3* **2**

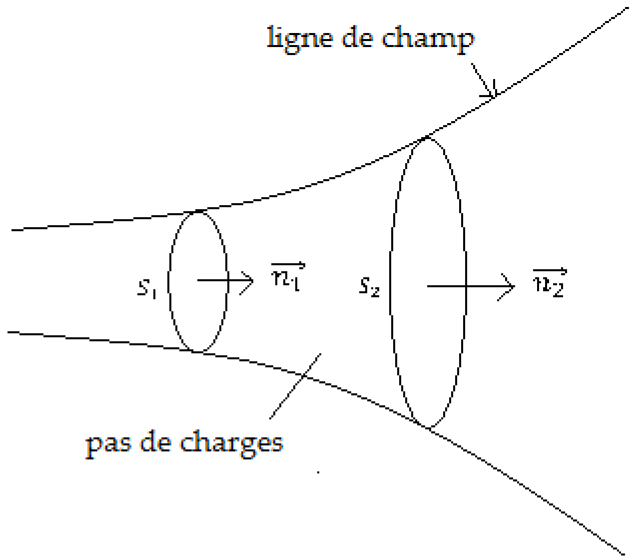

FIGURE **12** Le champ $\vec{E}$ est à flux conservatif

Le champ $\vec{E}$ est à *flux conservatif* (FIGURE **12**) :

$$\iint_{S_1} \vec{E}\,.\vec{n_1}dS = \iint_{S_2} \vec{E}\,.\vec{n_2}dS$$

4 Relations locales pour le potentiel

Contenu : potentiel – surface équipotentielle – équation de POISSON – équation de LAPLACE – laplacien – théorème de l'extremum

4.1 Introduction du potentiel

Puisque $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}(M) = \vec{0} \quad \forall M \in \mathbb{R}^3$ alors $\exists V(M)$ tel que $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V(M)$, V est en Volt (V).

REMARQUE 4.1. 1

On peut penser à utiliser $V(A) - V(B) = \int_{A\to B} \vec{E}.\overrightarrow{dl}$.

REMARQUE 4.1. 2

Si $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$ alors $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}V\right) = \vec{0}$.
On peut aussi si souvenir de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}X\right) = \vec{0}$ par $\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla}X\right) = \vec{0}$.

4.2 Surface équipotentielle

DEFINITION 4.2. 1 Surface équipotentielle

Une *surface équipotentielle* est une surface S telle que, $\forall M \in S, V(M) = cte$.

4.3 Equations de POISSON et de LAPLACE

EQUATION 4.3. 1 Equation de POISSON

$$\boxed{\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} = 0}$$

EQUATION 4.3. 2 Equation de LAPLACE

$$\boxed{\Delta V(M) = 0}$$

DEMONSTRATION 4.3. 3 Equation de LAPLACE

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\mathrm{div}\left[-\overrightarrow{\mathrm{grad}}V\right] = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\Delta V$$

Δ est l'opérateur linéaire *laplacien*, tel que :

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{X} = \mathbf{div}(\overrightarrow{\mathbf{grad}}\boldsymbol{X})}$$

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

4.4 Théorème de l'extremum

THEOREME 4.4. 1 Théorème de l'extremum

Le potentiel $V(M)$ ne présente pas d'extremum là où il n'y a pas de charge.

DEMONSTRATION 4.4. 2 Théorème de l'extremum

Supposons qu'il y ait un extremum en M où il n'y a pas de charge. Alors, d'après le théorème de GAUSS :

$$\underbrace{\oiint_S \vec{E}.\vec{n}dS}_{\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0},\ \text{avec } Q_{\text{int}}>0} > 0$$

Donc il ne peut y avoir de maximum ou de minimum.

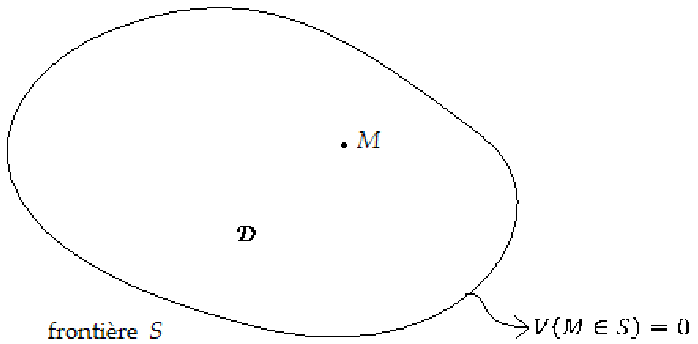

FIGURE 13 Domaine non chargé $\mathcal{D}$

$\forall M \in \mathcal{D}, \Delta V(M) = 0$, c'est-à-dire $\rho(M \in \mathcal{D}) = 0$.
Alors $V(M \in \mathcal{D}) = 0, \forall M \in \mathcal{D}$. En effet, il n'y a pas d'extremum dans $\mathcal{D}$; s'ils existent, ils sont sur la frontière S :

$$\underbrace{V_{\min}(M \in S)}_{0} \leq V(M \in \mathcal{D}) \leq \underbrace{V_{\max}(M \in S)}_{0}$$

REMARQUE 4.4. 3

$$\begin{cases} \Delta V + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \\ V(\infty) = 0 \end{cases}$$

Supposons que ce problème admette deux solutions V_1 et V_2 :

- V_1 avec $\Delta V_1 + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ et $V_1(\infty) = 0$;
- V_2 avec $\Delta V_2 + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ et $V_2(\infty) = 0$.

(1) Posons $W = V_1 - V_2$ avec $\Delta W = 0$, $\forall M \in \mathcal{D}$ et $W(\infty) = 0$.
(2)

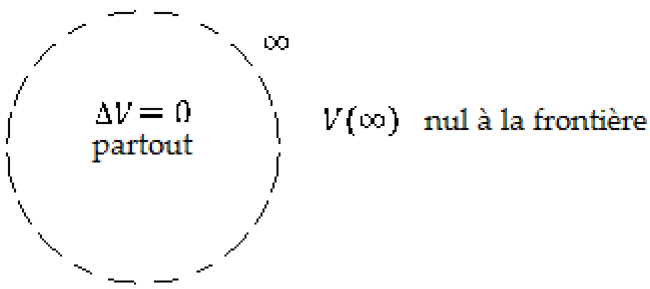

FIGURE 14

On a donc $W = 0$ soit $V_1 = V_2$ d'où l'unicité de la solution à ce problème.

❖ ❖ ❖

5 A propos de la continuité des champs $\vec{E}$ et V

Contenu : continuité du champ en distribution volumique – continuité du potentiel en distribution volumique – continuité du potentiel à la traversée d'une couche simple – discontinuité du potentiel à la traversée d'une couche double – discontinuité du potentiel à la traversée d'une surface chargée

PROPRIETES *5.* **1**

Pour les distributions volumiques (usuelles) :

- le champ est continu en tout point,
- le potentiel est continu en tout point.

Les problèmes se posent à la traversée des surfaces chargées.

- Pour le potentiel : il y a continuité à la traversée d'une couche simple, mais on montre que le potentiel est discontinu à la traversée d'une couche double (FIGURE **15**) :

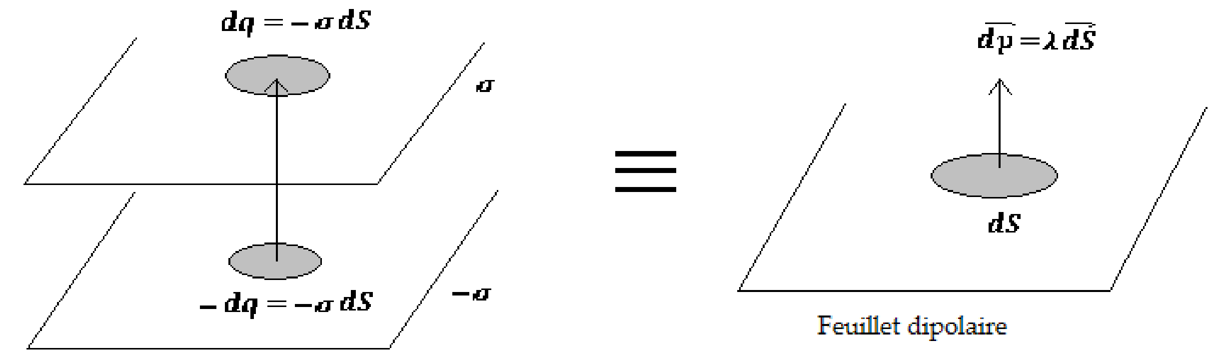

FIGURE **15** Assimilation d'une couche double à un feuillet dipolaire

- Pour le champ :
  On pose : $\overrightarrow{E_i}(M) = \lim_{M_i \to M} \vec{E}(M_i)$ (avec $i \in \{1,2\}$). Dans ce cas :

$$\overrightarrow{E_2}(M) - \overrightarrow{E_1}(M) = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0}\vec{n}(M)$$

  Cela veut dire qu'il y a discontinuité des composantes tangentielles de $\vec{E}$ à la traversée de σ et discontinuité des composantes normales (si $\sigma \neq 0$).

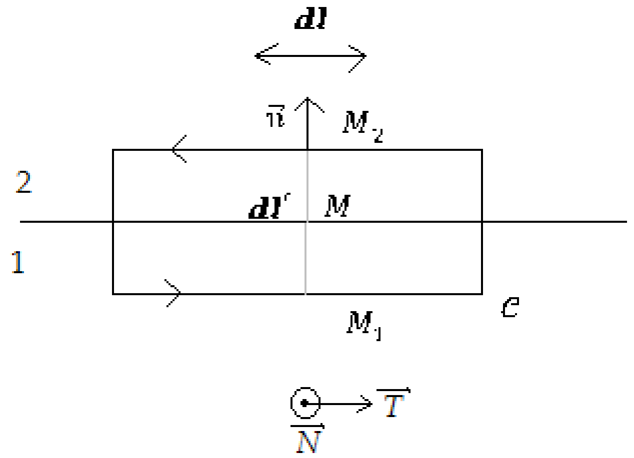

FIGURE 16 Continuité des composantes tangentielles du champ à la traversée de σ

$$\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = \iint_S [\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}].\vec{N}dS = 0$$

$$\vec{E}(M_1).\vec{T}dl + \vec{E}(M_2).(-\vec{T}dl) = 0$$

quand $dl' \to 0$, c'est-à-dire quand $M_2 \to M$ et $M_1 \to M$ d'où :

$$\vec{E_1}(M)\vec{T} = \vec{E_2}(M)\vec{T}$$

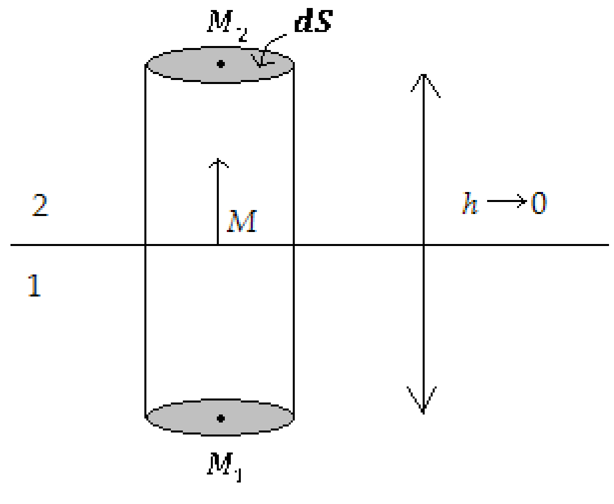

FIGURE 17 Discontinuité des composantes normales du champ à la traversée de σ

$$\vec{E}(M_2)^{5}.\vec{n}dS + \vec{E}(M_1)^{6}.(-\vec{n})dS + \iint_{S_{\mathrm{lat}}} \vec{E}\, dS = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}dS$$

[5] $\vec{E}(M_2) \xrightarrow[h\to 0]{} \vec{E_2}(M)$ (on l'a défini au début de ce paragraphe sur l'étude de la continuité du champ).
[6] $\vec{E}(M_1) \xrightarrow[h\to 0]{} \vec{E_1}(M)$ (on l'a défini au début de ce paragraphe sur l'étude de la continuité du champ).

Or, $\iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E}\, dS \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. D'où $\left(\overrightarrow{E_2}(M) - \overrightarrow{E_1}(M)\right).\vec{n}.dS = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dS$, puis :

$$\left(\overrightarrow{E_2}(M) - \overrightarrow{E_1}(M)\right).\vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

❖ ❖ ❖

6 Quelques expressions intégrales

Contenu : expression intégrale du champ électrostatique – expression intégrale du potentiel électrostatique

EXPRESSION *6.* **1** Expression intégrale du champ électrostatique

$$d\vec{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

donc :

$$\boxed{\vec{E} = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}d\tau(P)}$$

EXPRESSION *6.* **2** Expression intégrale du potentiel électrostatique

$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{PM} + cte$$

donc :

$$\boxed{V = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\tau(P)}{PM} + cte}$$

❖ ❖ ❖

7 Energie électrostatique

Contenu : énergie potentielle d'une charge dans un potentiel – énergie électrostatique d'un dipôle – énergie électrostatique d'un système de charges ponctuelles

7.1 Cas d'une charge q dans un potentiel $V(M)$

FORMULE 7.1. 1

$$\boxed{\boldsymbol{W = qV(M)}\ (\mathrm{J})}$$

REMARQUE 7.1. 2

Un opérateur amène q de l'infini (où l'on peut choisir $V(\infty)=0$) en M sans effet d'énergie cinétique.

$$W_{\text{opérateur}} = \int_{\infty}^{M} \vec{F}_{\text{op}}.\overrightarrow{dl}$$

THEOREME 7.1. 3 Théorème de l'énergie cinétique pour $\{q\}$

$\underbrace{\Delta E_c}_{=0} = W_{\text{op}} + W_{\text{él}}$ avec $W_{\text{él}} = \int_{\infty}^{M} \vec{F}_{\text{él}}.\overrightarrow{dl} = \int_{\infty}^{M} q\vec{E}.\overrightarrow{dl}$.

On a donc : $\vec{F}_{\text{op}} \approx -\vec{F}_{\text{él}}$ et $W_{\text{op}} = -W_{\text{él}} = -\int_{\infty}^{M} q\, \underbrace{\vec{E}.\overrightarrow{dl}}_{-dV} = q\left(V(M) - \underbrace{V(\infty)}_{0}\right)$.

L'énergie potentielle d'une charge q dans un potentiel V est aussi le travail que doit fournir l'opérateur pour l'amener de l'infini où le potentiel est nul au point M.

7.2 Energie électrostatique d'un dipôle

FORMULE 7.2. 1

$$\boxed{\boldsymbol{W = -\vec{p}\vec{E}}\ (\mathrm{J})}$$

DEMONSTRATION 7.2. 2

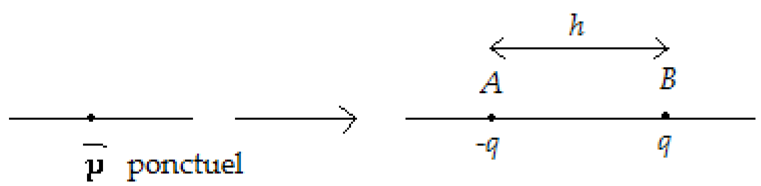

FIGURE 18 Dipôle électrostatique

On a $\vec{p} = qh\vec{u} = q\overrightarrow{AB}$.

$W = (-q)V(A) + qV(B)$, A et B très proches :

$$V(B) \approx V(A) + \vec{E}(A).\overrightarrow{BA}$$

Avec $\vec{p} = q\overrightarrow{AB} = qh\vec{u}$.

7.3 Cas d'un système de charges ponctuelles

FORMULES 7.3. 1

L'énergie d'interaction électrostatique est :

$$\boldsymbol{W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i^*}$$

V_i^* est le potentiel créé en M_i par toutes les autres charges que q_i :

$$V_i^* = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{i,j}}$$

IDEE DE DEMONSTRATION 7.3. 2

Toutes les charges sont à l'infini où le potentiel est nul. On amène les charges une à une à leur place en M_i.

$$W_1 = q_2 V_{q_1}(M_2)$$

$$W_2 = W_1 + q_3\left[V_{q_1}(M_3) + V_{q_2}(M_3)\right]$$

$$\vdots$$

REMARQUE 7.3. 3

Pour une distribution volumique, l'énergie d'interaction électrostatique est :

$$\boldsymbol{W = \frac{1}{2}\iiint_{\mathcal{D}} \rho(M)\, V(M) d\tau(m)}$$

4° Exercice résolu

Soit une boule de rayon R avec ρ uniforme. Calculer par deux méthodes différentes l'énergie d'interaction électrostatique (on prendra $V(\infty) = 0$ Volt).

Solution

Première méthode :
On amène une charge $dq = \rho 4\pi r^2 dr$ de l'infini pour constituer une couche supplémentaire $(r, r + dr)$.
L'énergie $W(r) \to W(r + dr)$ avec $dW(r) = (\rho 4\pi r^2 dr)V(r)$, $V(r)$ le potentiel créé par la charge dans la boule de rayon R.

$$V(r) = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0}$$

$$\boldsymbol{W} = \int_0^R \rho 4\pi r^2 . \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0} dr = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\frac{R^5}{5} = \boldsymbol{\frac{3Q^2}{20\varepsilon_0 R}}$$

avec $\boldsymbol{Q}$ = charge totale = $\boldsymbol{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}$.

Deuxième méthode :

$$W = \frac{1}{2}\iiint_{\text{boule}} \rho(M)V(M)d\tau$$

Pour intégrer, on a besoin du potentiel dans la boule. On calcule $E(r \leq R)$.

$$\vec{E}(M) = E(M)\overrightarrow{u_r}, \qquad E(M) = \underbrace{E(r)}_{\text{invariance de } \mathcal{D}_\rho \text{ par rotations}}$$

On applique le théorème de GAUSS à une surface sphérique de rayon r, centrée en O, orientée vers l'extérieur :

$$\oiint_{S(r)} \vec{E}.\overrightarrow{u_r}dS = E(r)4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V(r) - V(R) = \int_r^R E(r \leq R)dr = \int_r^R \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}dr$$

Comme $V(R^-) = V(R^+) = V(R)$ et qu'on connaît $V(r \geq R) = \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0}$:

$$V(r) = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + \int_r^R \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}dr$$

Autre possibilité : calculer $\vec{E}(r \geq R) = E(r \geq R)\overrightarrow{u_r}$ puis $V(r \geq R)$
On applique le théorème de GAUSS :

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E(r \geq R) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}$$

Puis :

$$V(r) - \underbrace{V(\infty)}_{\substack{=0 \\ \text{par choix de} \\ \text{l'origine}}} = \int_r^\infty \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \int_r^\infty E(r \geq R)\, dr$$

❖ ❖ ❖

Index

❖ ❖ ❖