Cours de mathématiques

Séries à termes dans $\mathbb{R}_+$

Toutes les séries envisagées ici sont à termes dans $\mathbb{R}_+$.

1 Lemme fondamental

LEMME *1.* 1

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$une série à termes dans $\mathbb{R}_+$.

Pour que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, il faut et il suffit qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M}$$

PREUVE *1.* 2

Puisque $(\forall n \geq 0, u_n \geq 0)$, la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est croissante. Pour que $(S_n)_{n\geq 0}$ converge, il faut et il suffit que $(S_n)_{n\geq 0}$ soit majorée.

REMARQUES *1.* 3

- Si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0 \\ \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge} \end{cases}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
- Si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0 \\ \sum_{n\geq 0} u_n \text{ diverge} \end{cases}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

2 Théorèmes de comparaison

THEOREME *2.* 1 Théorème de majoration

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes réels.

$$\boxed{\textbf{Si} \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n\geq 0} v_n \textbf{ converge} \end{cases}, \textbf{ alors } \sum_{n\geq 0} u_n \textbf{ converge.}}$$

PREUVE 2. 2 Théorème de majoration

On a, $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$. D'après le LEMME 1. 1, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

REMARQUES 2. 3

- Cas des séries à termes dans $\mathbb{R}_-$: on peut adopter le théorème. Le plus commode est cependant, lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n \leq 0 \\ v_n \leq 0 \end{cases}$, d'étudier les séries des opposés : $\sum_{n\geq 0} -u_n$ et $\sum_{n\geq 0} -v_n$.
- Par contraposition, on a : Si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n\geq 0} u_n \text{ diverge} \end{cases}$, alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.
- Hypothèse plus faible : on peut remplacer l'hypothèse $(\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n)$ par l'hypothèse plus faible $(\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq v_n$.

THEOREME 2. 4

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{R}_+$.

Si $\begin{cases} u_n = O_{n\to+\infty}(\alpha_n) \\ \sum_{n\geq 0} \alpha_n \text{ converge} \end{cases}$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

PREUVE 2. 5

Il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C \in \mathbb{R}_+$ tels que : $\forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq C\alpha_n$. Comme $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ converge, $\sum_{n\geq 0} C\alpha_n$ converge puis $\sum_{n\geq N} u_n$ converge, donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

THEOREME 2. 6 Théorème d'équivalence

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes réels.

Si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \\ u_n \sim_{n\to+\infty} v_n \end{cases}$, alors les deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

PREUVE 2. 7 Théorème d'équivalence

- Montrons d'abord : $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, u_n \geq 0$. Puisque $u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, |u_n - v_n| \leq v_n$ et donc $\forall n \geq N$, $0 \leq u_n (\leq 2v_n)$.
- Puisque $u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$, on a $\begin{cases} u_n = O_{n\to+\infty}(v_n) \\ v_n = O_{n\to+\infty}(u_n) \end{cases}$. On conclut : $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si, et seulement si, $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.

3 Séries de RIEMANN

3.1 Exemple de RIEMANN

PROPRIETE 3.1. 1 Exemple de RIEMANN

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, appelée série de RIEMANN, converge si, et seulement si,

$$\boxed{\alpha > 1}$$

PREUVE 3.1. 2 Exemple de RIEMANN

- Si $\alpha \leq 0$, alors $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\nrightarrow} 0$, donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.
- Si $\alpha = 1$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge car il s'agit de la série harmonique.
- Si $0 \leq \alpha \leq 1$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge, car, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} > 0$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.
- Supposons enfin $\alpha > 1$.
  Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$. On a, pour tout n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

  d'où

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{1}{\alpha-1}$$

  D'après le lemme fondamental, il en résulte que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

3.2 Règle $n^\alpha u_n$

PROPRIETE 3.2. 1 Règle $n^\alpha u_n$

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+$.

S'il existe $\alpha \in \,]1, +\infty[$ tel que :

$$\boxed{n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

PREUVE 3.2. 1 Règle $n^\alpha u_n$

Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N$, $0 \leq n^\alpha u_n \leq 1$. Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge (car $\alpha > 1$), le théorème de majoration permet de déduire la convergence de $\sum_{n\geq 0} u_n$.

EXEMPLE 3.2. 2

Nature de la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^a}$, a fixé

Pour tout α de $\mathbb{R}_+^*$: $n^\alpha u_n = \exp(\alpha \ln n - (\ln n)^a)$.

- Si $a > 1$, alors, pour tout $\alpha > 0$ fixé, $\alpha \ln n - (\ln n)^a \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ et donc $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En particulier $n^2 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
- Si $a = 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$, donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.
- Si $a < 1$, alors, pour tout $n \geq 3$, $e^{-(\ln n)^a} \geq e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$, donc $\sum_{n\geq 3} u_n$ diverge.

On conclut, la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^a}$ converge si, et seulement si, $a > 1$.

3.3 Séries de BERTRAND

PROPRIETE 3.3. 1 Exemple de BERTRAND

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

La série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, appelée série de BERTRAND, converge si, et seulement si,

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{\alpha > 1} \\ \textbf{OU} \\ (\boldsymbol{\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1}) \end{cases}}$$

PREUVE 3.3. 2 Exemple de BERTRAND

- Si $\alpha > 1$, on note $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$ et on a $n^\gamma \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = n^{\frac{1-\alpha}{2}} (\ln n)^{-\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la série étudiée converge (règle $n^\alpha u_n$).
- Si $\alpha < 1$, comme $n \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = n^{1-\alpha} (\ln n)^{-\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existe un indice à partir duquel $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n}$, et donc la série étudiée diverge.
- Si $\alpha = 1$, on utilise une comparaison série-intégrale.
  La fonction $x \mapsto \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ décroît au voisinage de $+\infty$ (étude de sa dérivée).
  Il existe donc $N \geq 3$ tel que : $\forall n \geq N$,

$$\int_N^{n+1} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\mathrm{d}x \leq \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_{N-1}^{n} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\mathrm{d}x$$

❖ Si $\beta > 1$, alors, pour tout n tel que $n \geq N$:

$$\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_{N-1}^{n} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\mathrm{d}x \underbrace{=}_{y=\ln x} \int_{\ln(N-1)}^{\ln n} \frac{1}{y^\beta}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{(\ln(N-1))^{1-\beta} - (\ln n)^{1-\beta}}{\beta - 1} \leq \frac{(\ln(N-1))^{1-\beta}}{\beta - 1}$$

D'après le lemme fondamental, il en résulte que $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge.

❖ Si $\beta = 1$, alors, pour tout n tel que $n \geq N$:

$$\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k\ln k} \geq \int_{N}^{n+1} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x \underbrace{=}_{y=\ln x} \int_{\ln N}^{\ln(n+1)} \frac{1}{y}\mathrm{d}y$$

$$= \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln N) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Donc $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}$ diverge.

❖ Si $\beta < 1$, alors, comme $\frac{1}{n(\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n\ln n}$, $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ diverge.

4 Série géométrique

4.1 Série géométrique dans $\mathbb{K}$

DEFINITION 4.1. 1 Série géométrique

Pour tout r de $\mathbb{K}$, la série $\sum_{n\geq 0} r^n$ est appelée série géométrique.

THÉOREME 4.1. 2 Convergence des séries géométriques

Soit $r \in \mathbb{K}$, la série $\sum_{n\geq 0} r_n$ converge si, et seulement si, $|r| < 1$.

De plus, si $|r| < 1$, alors :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}}$$

PREUVE 4.1. 3 Convergence des séries géométriques

1) Si $|r| \geq 1$, alors $(\forall n \in \mathbb{N}, |r^n| \geq 1)$ donc $r^n \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$, $\sum_{n\geq 0} r^n$ diverge grossièrement.
2) Si $|r| < 1$, alors $\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1-r}$, donc $\sum_{n\geq 0} r^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

REMARQUE 4.1. 4

Soit $r \in \mathbb{K}$ tel que $|r| < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a[1] :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} r^k = r^{n+1} \sum_{p=0}^{+\infty} r^p = \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

4.2 Règle de d'ALEMBERT

THEOREME 4.2. 1 Règle de d'ALEMBERT pour les séries numériques

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes réels strictement positifs. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}_+$.

Alors :

- si $\ell < 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge,
- si $\ell > 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge,
- si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

PREUVE 4.2. 2 Règle de d'ALEMBERT pour les séries numériques

1) Supposons $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$. Notons $\lambda = \frac{\ell+1}{2}$, de sorte que $\ell < \lambda < 1$. Puisque $0 < \lambda < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geq 0} \lambda^n$ converge.
Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < \lambda$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$. On a alors, pour tout $n \geq N+1$:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \dots \frac{u_{N+1}}{u_N} \leq \lambda^{n-N}$$

Donc après simplifications : $u_n \leq u_N \lambda^{n-N} = \frac{u_N}{\lambda^N} \lambda^n$.
Comme $0 \leq \lambda < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geq 0} \lambda^n$ converge, et donc, par le théorème de majoration pour des séries à termes dans $\mathbb{R}_+$, on conclut que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

[1] Changement d'indice $p = k - n - 1$, n fixé.

2) Supposons $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.
Ainsi, $(u_n)_{n\geq N}$ est croissante. On a alors : $\forall n \geq N, u_n \geq u_N > 0$, et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\nrightarrow} 0$.
Ainsi $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement.

REMARQUES 4.2. 3 Règle $n^\alpha u_n$

- Appliquer la règle de d'Alembert à une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ (à termes strictement positifs) revient à comparer $\sum_{n\geq 0} u_n$ à des séries géométriques.
- On essaiera d'appliquer la règle de d'ALEMBERT lorsque le terme général u_n « contient » des exponentielles ou des puissances $n^{\text{èmes}}$.

EXEMPLE 4.2. 4

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$,
- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} < 1$.

On conclut, d'après la règle de d'ALEMBERT : $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

AUTRE METHODE :

On a pour $n \geq 2$:

$$0 \leq u_n = \frac{1.2.\dots.n}{n.n.\dots.n} \leq \frac{1.2}{n.n} = \frac{2}{n^2}$$

donc d'après l'exemple de RIEMANN $(2 > 1)$ et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

REMARQUES 4.2. 5

- Si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ n'a pas de limite, il se peut que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ou diverge.

  Par exemple :

  - $u_n = (2+(-1)^n)2^{-n}$: $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ n'a pas de limite et $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
  - $u_n = 2+(-1)^n$: $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ n'a pas de limite et $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

– Si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, il se peut que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ou diverge.

Par exemple :

- $u_n = \frac{1}{n}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.
- $u_n = \frac{1}{n^2}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.