Cours de mécanique du solide

Statique des solides

DEFINITION *0.1* Solide en équilibre par rapport à un repère

On dira qu'un solide S ou un ensemble de solides S_i est en équilibre par rapport à un repère R si le vecteur position de chaque point (du ou des solides) est indépendant du temps.

1 Principe fondamental de la statique

ENONCE *1.1* Principe fondamental de la statique

Il existe un repère galiléen tel que pour tout sous système s de l'ensemble des solides S_i étudié le torseur des actions extérieures appliqué à ce sous système est nul.

$$\boxed{\{\mathcal{T}(ext \rightarrow s)\} = \{O\}\ \forall s}$$

avec $\{O\}$ le torseur nul.

La notion de repère galiléen dépend de l'objectif visé. Une étude d'un mécanisme sur terre se fait avec un repère local attaché à la terre, repère supposé galiléen. Par contre envoyer une fusée sur la Lune exige de considérer comme galiléen un autre repère.

De l'équation précédente, on en déduit évidemment les deux équations :

$$\boxed{\vec{R}(ext \rightarrow s) = \vec{0}}$$

$$\boxed{\vec{M}(A, ext \rightarrow s) = \vec{0}\ \forall A}$$

REMARQUE *1.2*

Il faut faire très attention à la formulation de ce principe car un système de solides soumis à un torseur d'actions extérieures nul n'est pas nécessaire en équilibre par rapport au repère de travail. Il n'y a pas équivalence sauf pour le cas d'un solide. C'est la raison pour laquelle il est nécessaire d'ajouter la condition de vecteur position en tout point indépendant du temps (exemple de la paire de ciseaux).

2 Théorème des actions réciproques

On considère un système matériel E en équilibre par rapport à R. On divise ce système en deux parties E_1 et E_2 (FIGURE 1). On applique le principe fondamental de la statique à chaque partie.

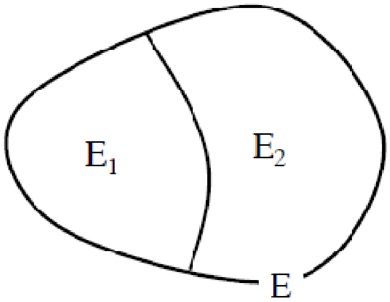

FIGURE 1 Division du système E en deux parties E_1 et E_2

Pour E_1 :

$$\{\mathcal{T}(\overline{E_1} \to E_1)\} = \{O\}$$

Or ce qui constitue l'extérieur à E_1 est l'extérieur à E plus E_2. Donc :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \to E_1)\} + \{\mathcal{T}(E_2 \to E_1)\} = \{O\}$$

Si on considère maintenant le système E_2 :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \to E_2)\} + \{\mathcal{T}(E_1 \to E_2)\} = \{O\}$$

En ajoutant les deux équations précédentes, on obtient :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \to E_1)\} + \{\mathcal{T}(E_2 \to E_1)\} + \{\mathcal{T}(\bar{E} \to E_2)\} + \{\mathcal{T}(E_1 \to E_2)\} = \{O\}$$

On peut rassembler les termes $\{\mathcal{T}(\bar{E} \to E_1)\}$ et $\{\mathcal{T}(\bar{E} \to E_2)\}$ pour écrire $\{\mathcal{T}(\bar{E} \to E)\}$ car $E_1 \cup E_2 = E$. On a donc au final :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \to E)\} + \{\mathcal{T}(E_2 \to E_1)\} + \{\mathcal{T}(E_1 \to E_2)\} = \{O\}$$

Or on peut aussi appliquer le principe fondamental de la statique au système E ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\{\boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{E_1} \to \boldsymbol{E_2})\} = -\{\boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{E_2} \to \boldsymbol{E_1})\}}$$

On en déduit que le torseur des actions mécaniques exercées par E_1 sur E_2 est opposé à celui des actions exercées par E_2 sur E_1.

❖ ❖ ❖