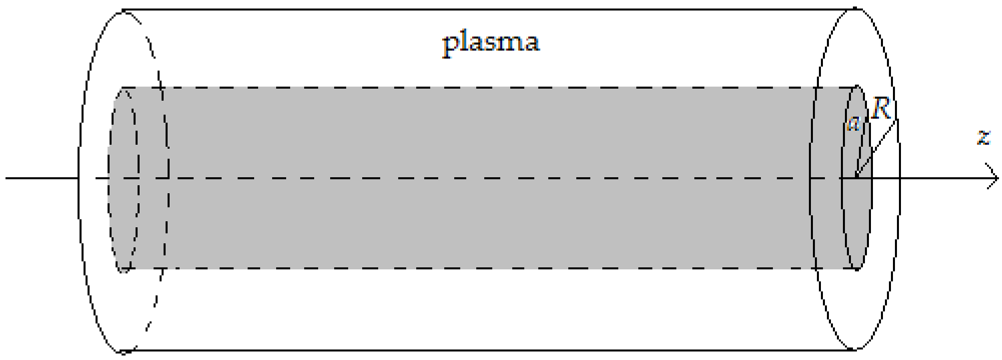
Exercice d'électromagnétisme

Striction d'une colonne de plasma

ENONCE



Le plasma est traversé par un courant I uniformément réparti. Déterminer la pression s'exerçant en un point M de la surface du cylindre intérieur.

CORRECTION

On a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}P(M) = \vec{j}(M) \wedge \vec{B}(M)$$

❖ Détermination du champ $\vec{B}(M)$

On se place en coordonnées cylindriques.

– **Symétries :**

Les plans perpendiculaires à l'axe (Oz) sont des plans d'antisymétrie de la distribution de courant. Par conséquent, le champ magnétique est contenu dans ces plans.
Les plans contenant l'axe (Oz) sont des plans de symétrie de la distribution de courant. Par conséquent, le champ magnétique est perpendiculaire à ces plans.

On en déduit que $\vec{B}$ est de la forme :

$$\vec{B} = B(r, \theta, z)\overrightarrow{u_\theta}$$

- **Invariances :**

Le champ magnétique est invariant par translation selon l'axe (Oz), donc $\vec{B} = B(r,\theta)\overrightarrow{u_\theta}$.
Le champ magnétique est invariant par rotation autour de l'axe (Oz), donc $\vec{B} = B(r)\overrightarrow{u_\theta}$.

On cherche donc le champ de la forme :

$$\vec{B} = B(r)\overrightarrow{u_\theta}$$

- **Calcul du champ avec le théorème d'AMPERE :**

Pour calculer $B(r)$, on applique le théorème d'AMPERE sur un contour fermé $\mathcal{C}$, un cercle de centre H situé sur l'axe (Oz) et de rayon r tel que : $a \leq r \leq R$.

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} = \mu_0 I$$

Or comme I est uniformément réparti :

$$j = \frac{I}{\pi(r^2 - a^2)}$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}.\overrightarrow{dl} = B(r)2\pi r$$

D'où $B(r)2\pi r = \mu_0 I = \mu_0 j\pi(r^2 - a^2)$ puis $B(r) = \frac{\mu_0 j\pi(r^2-a^2)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j(r^2-a^2)}{2r}$, soit enfin :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 j(r^2 - a^2)}{2r}\overrightarrow{u_\theta}$$

❖ **Détermination de $\vec{j}(M)$**

Le vecteur $\vec{j}(M)$ est porté par $\overrightarrow{u_z}$ et comme ce vecteur est constant, on obtient :

$$\vec{j}(M) = j\overrightarrow{u_z}$$

❖ **Calcul de $\vec{j}(M) \wedge \vec{B}(M) = \overrightarrow{\text{grad}}P(M)$**

$\vec{j}(M)$ est porté par $\overrightarrow{u_z}$ et $\vec{B}(M)$ par $\overrightarrow{u_\theta}$ donc $\vec{j}(M) \wedge \vec{B}(M)$ est porté par $\overrightarrow{u_r}$.

$$\vec{j}(M) \wedge \vec{B}(M) = \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ j \end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix} 0 \\ \dfrac{\mu_0 j(r^2 - a^2)}{2r} \\ 0 \end{matrix}\right. = -\frac{\mu_0 j^2(r^2 - a^2)}{2r}\overrightarrow{u_r}$$

D'où :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}P = -\frac{\mu_0 j^2(r^2-a^2)}{2r}\overrightarrow{u_r}$$

❖ Calcul de $P(M)$

Comme $\overrightarrow{\mathrm{grad}}P(M) = -\frac{\mu_0 j^2(r^2-a^2)}{2r}\overrightarrow{u_r}$, avec $M(r,\theta,z)$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}P$ est porté par $\overrightarrow{u_r}$.

En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}P(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P(M)}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial P(M)}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}P(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial r}\overrightarrow{u_r} = -\frac{\mu_0 j^2(r^2-a^2)}{2r}\overrightarrow{u_r}$ d'où :

$$\frac{\partial P(M)}{\partial r} = -\frac{\mu_0 j^2(r^2-a^2)}{2r} = -\frac{\mu_0 j^2 r^2}{2r} + \frac{\mu_0 j^2 a^2}{2r} = \frac{\mu_0 j^2 r}{2} + \frac{\mu_0 j^2 a^2}{2r}$$

On trouve donc :

$$\boxed{\boldsymbol{P(M) = \frac{\mu_0 j^2 r^2}{4} + \frac{\mu_0 j^2 a^2}{2}\ln(r) + constante}}$$

❖ Détermination de la constante

La constante d'intégration est fixée par les conditions initiales sur la pression extérieure, exercée sur l'ensemble du système.

❖ Pression s'exerçant en un point de la surface du cylindre intérieur

Si M appartient à la surface du cylindre intérieur, alors $r = a$ et donc :

$$P(M) = P(r=a) = \frac{\mu_0 j^2 a^2}{4} + \frac{\mu_0 j^2 a^2}{2}\ln(a) + constante$$

$$= \frac{\mu_0 j^2 a^2}{2}\left(\ln(a) + \frac{1}{2}\right) + constante$$

❖❖❖