Systèmes oscillants

Définition :
Un système oscillant est un système mécanique dont le mouvement est périodique et qui s'effectue de part et d'autre d'une position d'équilibre stable.

A – L'exemple du pendule pesant

I – Définitions : pendule pesant et pendule simple

1) Le pendule pesant

Un pendule pesant est un solide mobile autour d'un axe fixe horizontal ne dépassant pas son centre d'inertie. Ecarté de sa position d'équilibre, il oscille sous la seule action de son poids.

2) Le pendule simple

Un pendule simple est constitué d'un solide de masse *m*, de petite dimension, suspendu par un fil inextensible, de masse négligeable devant celle du solide et de longueur *l* très supérieure à la dimension du solide.
Un pendule simple est une modélisation simplificatrice du pendule pesant.

3) Oscillation du pendule

Une oscillation du pendule est le trajet effectué par le solide entre deux passages consécutifs, dans le même sens, par la position d'équilibre.

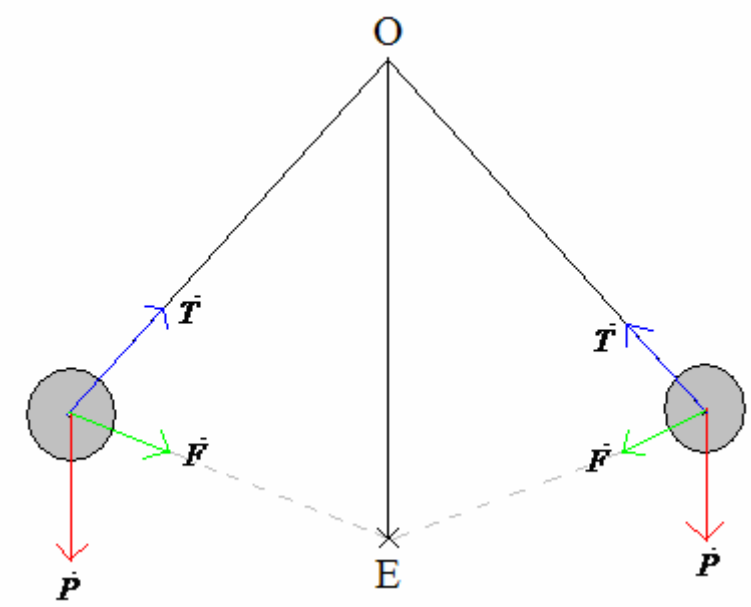
II – Etude du mouvement du pendule simple

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on étudie le mouvement du centre d'inertie du pendule simple.

Bilan des forces :
Le poids $\vec{P}$, la tension du fil $\vec{T}$ (radiale centripète vers le point d'attache du fil).

Condition d'équilibre du pendule simple :
D'après la première loi de Newton : $\vec{P}+\vec{T}=\vec{0}$, dans la position d'équilibre. Donc $P=T \Rightarrow \theta = 0°$.

Interprétation du mouvement du pendule :
$\vec{F}=\vec{P}+\vec{T}$.



La résultante des forces est non nulle, dirigée vers sa position d'équilibre E. L'ensemble des forces tend à ramener le système vers son état d'équilibre. Lorsque le système dépasse la position d'équilibre, la résultante des forces change de sens et provoque un ralentissement du système, son arrêt.

III – Lois du pendule simple

1) Loi d'isochronisme des petites oscillations

a. Approche historique

Dans l'ouvrage *Dialogues* (1632), Galilée affirme, à propos des oscillations d'un pendule simple, que : « Chacune de ces oscillations se fait dans des temps égaux, tant celle de 90°, que celle de 50°, ou de 20°, de 10°, de 4°. ».
Dans l'ouvrage *Horlogium Oscillatorium* (1658), Huygens note que seules les oscillations de faible amplitude doivent être considérées comme isochrones, c'est-à-dire avoir une période indépendante de l'amplitude.

b. Etude expérimentale

Réalisons une expérience pour lever cette contradiction.
Prenons un pendule simple comportant une boule dense et de faible diamètre.
Mesurons la durée des cinq premières oscillations pour différentes amplitudes : 60°, 45°, 30°, 15°, 10°, 5°, 3°.
Les résultats des mesures réalisées avec un pendule d'une longueur l = 2 m :

θ (°)	3°	5°	10°	30°	45°	60°
T (s)	2,85	2,85	2,85	2,90	2,99	3,13

c. Interprétation

Contrairement aux affirmations de Galilée, la période *T* des oscillations d'un pendule simple dépend de l'amplitude lorsque celle-ci est supérieure à 10° environ.
Lorsque l'amplitude des oscillations d'un pendule simple est inférieure à environ 10°, la période est pratiquement indépendante de l'amplitude (loi d'isochronisme des petites oscillations).

2) Lois des masses

a. Etude expérimentale

Fabriquons trois pendules simples de même longueur avec trois boules de même rayon : l'une en plomb, l'autre en acier, la dernière en bois.
Mesurons la période d'oscillation de chacun d'eux pour une même amplitude θ_m.

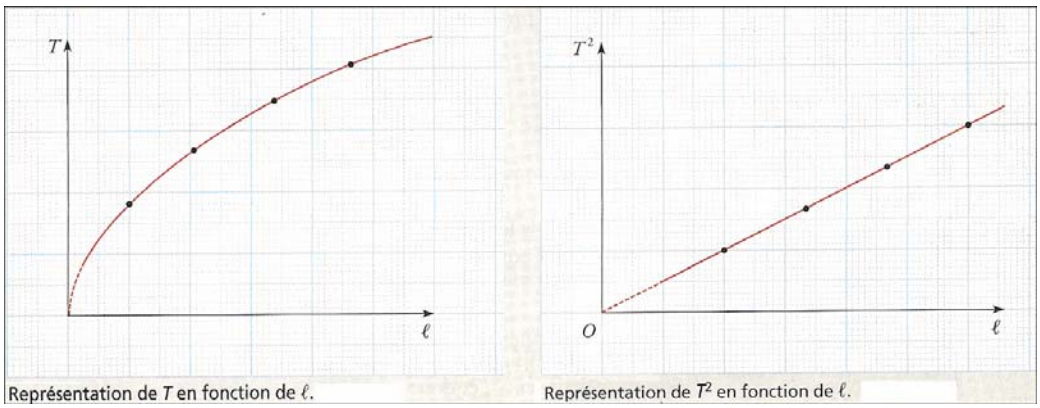
b. Interprétation

On choisit des boules de même diamètre pour que les forces de frottement de l'air soient les mêmes et que les distances *OG* soient identiques.
Nous constatons que ces pendules, de masses différentes, oscillent avec la même période.
La période *T* des oscillations d'un pendule simple est indépendante de la masse *m* de la boule suspendue à l'extrémité du fil (loi des masses).

3) Lois des longueurs

a. Etude expérimentale

Prenons un pendule simple de longueur *l*.
Mesurons sa période d'oscillations de faible amplitude.
Modifions la longueur et faisons une nouvelle mesure de période.
Etablissons un tableau de mesure.
Représentons graphiquement *T* en fonction de *l*, puis T^2 en fonction de *l*.
On obtient les graphiques suivants.



Représentation de *T* en fonction de ℓ. Représentation de T^2 en fonction de ℓ.

b. Interprétation

Le carré T^2 de la période est proportionnel à la longueur l.
La période T des oscillations d'un pendule simple est proportionnelle à la racine carrée de la longueur du pendule :
$T = k.\sqrt{l}$.

4) Influence de la pesanteur

a. Activité

Motivation :

Le poids $\vec{P}$ de l'objet suspendu tend à ramener un pendule vers sa position d'équilibre : cette force est la cause des oscillations.
La période T pourrait donc dépendre de la valeur $P = m.g$ du poids sans dépendre de la masse m (loi des masses) : elle dépendrait donc de l'intensité g de la pesanteur.

Expérience :
Au XVIII^{e} siècle, les marins se sont demandés si la période des oscillations du pendule de leurs horloges de marine n'était pas modifiée par le changement de latitude du lieu.
Au cours de leurs voyages entre le 50^{e} parallèle nord et l'équateur, ils ne pouvaient pas négliger cette perturbation éventuelle.
Aucune variation n'était observable par des mesures directes de la période, car l'écart relatif était de l'ordre du millième.
En revanche, la comparaison du temps indiqué par une horloge à pendule avec le temps de passage du Soleil ou d'une étoile au méridien révélait des dérives qui ne pouvaient être négligeables.
Une horloge « gardait » l'heure de Londres. Mais lorsque cette horloge était transportée à l'équateur, elle se mettait à retarder de 113 s par jour sidéral.

b. Interprétation

L'intensité g de la pesanteur change avec la latitude, car la Terre n'est pas sphérique : elle est aplatie aux pôles. La valeur de g est légèrement plus élevée au 50° parallèle nord qu'à l'équateur.
L'horloge régulée par un pendule présentait, par rapport à la même horloge en Europe, un retard à l'équateur : elle avait donc compté, au bout d'une journée un plus petit nombre d'oscillations ; donc la durée de chaque oscillation, c'est-à-dire la période était devenue trop grande.
La période T d'un pendule simple augmente lorsque l'intensité g de la pesanteur diminue.

5) Détermination de l'expression de la période d'un pendule simple

a. Homogénéité de la formule $T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$

Les paramètres *l* et *g* qui interviennent dans la période sont dits spécifiques du pendule simple.
Montrons à partir d'une analyse des unités de mesure de la longueur *l*, de l'intensité de la pesanteur *g* et de la période *T* que l'expression de celle-ci est de la forme : $T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$

l s'exprime en mètre (m) et *g* en mètre par seconde au carré ($m.s^{-2}$). Le quotient $\frac{l}{g}$ s'exprime donc en $\frac{m}{m.s^{-2}}$, soit en s^2, et donc $\sqrt{\frac{l}{g}}$ s'exprime en seconde.

Par conséquent, puisque *T* s'exprime en seconde, on peut écrire $T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$, où *k* est un coefficient numérique sans unité.

b. Détermination du coefficient *k*

Un ensemble de mesures effectuées sur des oscillations de faible amplitude donne, pour le rapport $\frac{T_{mesurée}}{\sqrt{\frac{l}{g}}} = k$, un valeur moyenne de 6,28.

La théorie du pendule simple, pour des oscillations de faible amplitude peu ou non amorties, montre que $k = 2\pi$.

c. Conclusion

La période qui ne dépend que des paramètres spécifiques du pendule est appelée période propre du pendule simple, souvent notée T_0.

Son expression est $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, avec T_0 en seconde (s), *l* en mètre (m) et *g* en mètre par seconde au carré ($m.s^{-2}$).

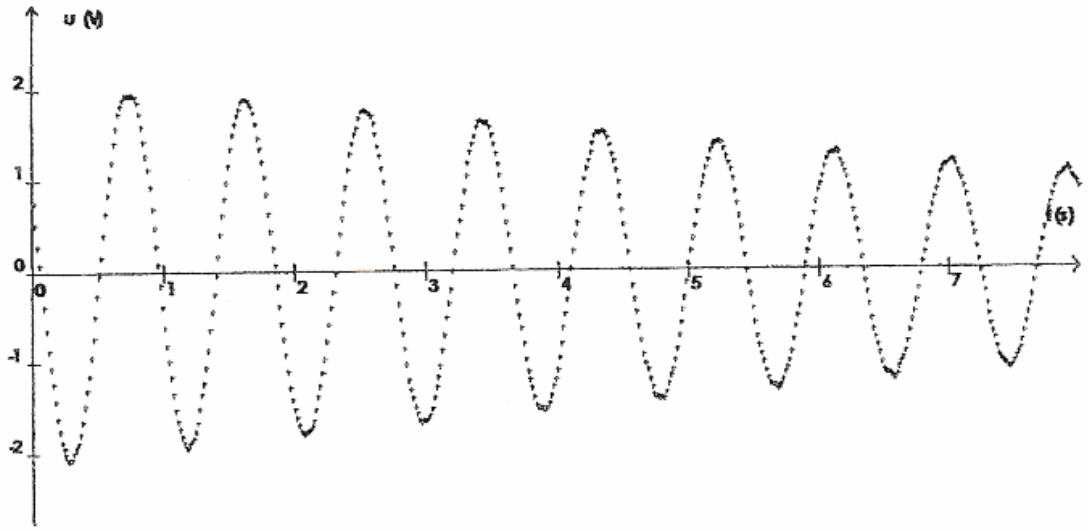
IV – Oscillations libres amorties

1) Nature des oscillations et grandeur caractéristique

Observations expérimentales :
On réalise l'enregistrement et l'acquisition du mouvement du centre d'inertie d'un pendule simple. On trace les variations d'amplitude des oscillations en fonction du temps.
On observe des oscillations mécaniques libres amorties : régime pseudo-périodique.

Définition :
Ce régime est caractérisé par une pseudo-période : la pseudo-période est la durée *T* qui sépare deux passages consécutifs du pendule, dans le même sens, par la position de repos.

Détermination graphique de la pseudo-période des oscillations :



On mesure la durée de plusieurs pseudo-périodes puis on divise cette durée par le nombre de pseudo-périodes comptées, pour plus de précision.
Ainsi, on trouve $T = 0{,}9$ s sur le document.

2) Oscillations faiblement amorties

Si l'amortissement est très faible, on considère le régime comme périodique et on assimile la pseudo-période à la période propre de l'oscillateur mécanique.

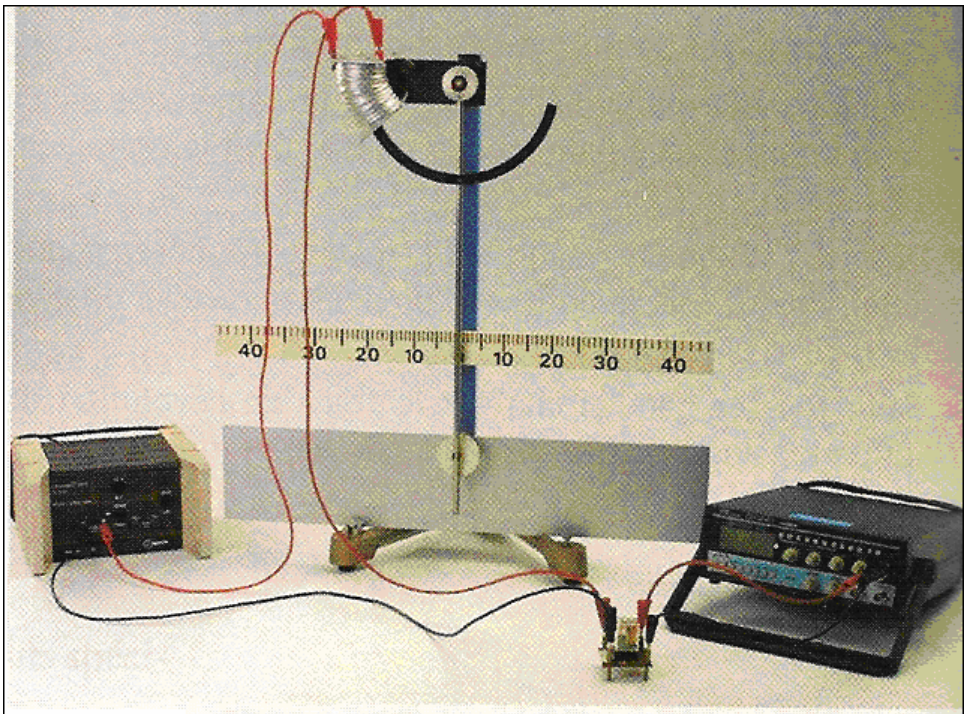
3) Oscillations fortement amorties

Si les oscillations sont très fortement amorties, on observe un régime apériodique. Les amortisseurs de voiture doivent fonctionner en régime apériodique.

V – Oscillations forcées et résonance

1) Etude expérimentale

Le dispositif d'étude comporte un pendule constitué d'une boule (ou d'un disque) fixée sur une tige pouvant tourner autour d'un axe fixe grâce à un roulement à billes.
A la partie supérieure de la tige est soudé un arc en fer pouvant pénétrer dans une bobine.
La bobine est alimentée par un générateur de courant continu qui délivre des impulsions de courte durée à intervalles de temps égaux notés T_E.
Quand la bobine est alimentée, le fer doux subit l'action d'une force magnétique attractive. Cette force est périodique de même période T_E que les impulsions délivrées par le générateur très basse fréquence.



Production d'oscillations forcées par une force magnétique périodique.

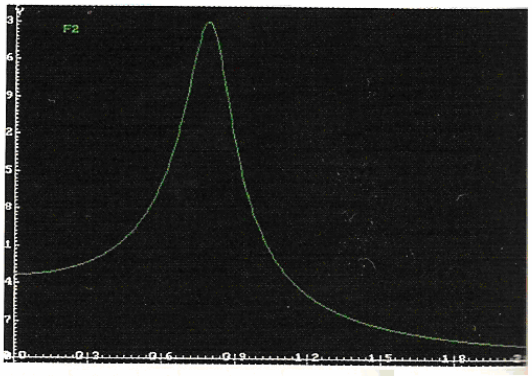
Déterminons la période propre T_0 des oscillations libres du pendule peu amorti.

Faisons varier la période T_E de la force magnétique de $\frac{T_0}{2}$ à $2T_0$.

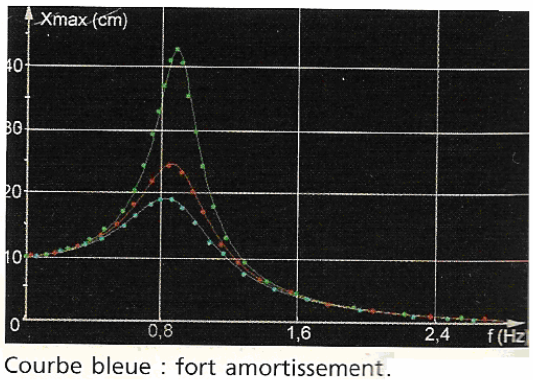
Notons dans un tableau, pour chaque période T_E choisie :

- La période T des oscillations forcées du pendule.
- L'amplitude θ_m des oscillations du pendule.

Accroissons l'amortissement du pendule à l'aide du dispositif de freinage, puis recommencer l'expérience.



Amplitude θ_m des oscillations forcées en fonction de la fréquence $f_E = 1/T_E$ de l'excitateur.



Courbe bleue : fort amortissement.
courbe verte : faible amortissement.

2) Interprétation

La période T (la fréquence et $f = \frac{1}{T}$) des oscillations du pendule est la même que la période T_E ($f = \frac{1}{T_E}$) de la force magnétique : les oscillations du pendule sont dites forcées.
Le dispositif {générateur-bobine}, qui impose sa période, est l'excitateur. L'amplitude θ_m des oscillations forcées dépend de la période des T_E de l'excitateur.
Lorsque la période T_E de l'excitateur est voisine de la période propre T_0 du pendule, l'amplitude des oscillations forcées est maximale : on dit qu'il y a résonance.
Le pendule mis en oscillations forcées est appelé résonateur.
L'amplitude θ_m des oscillations forcées est d'autant plus grande que l'amortissement est faible : la résonance est alors dite aiguë.
Quand l'amortissement est important, on constate que l'amplitude est faible : la résonance est floue ; la période T_E de la force magnétique lors de la résonance est nettement différente de la période propre T_0 du pendule.
Quand l'amortissement est important, la résonance disparaît.

3) Conclusion

La période des oscillations forcées d'un résonateur est imposée par l'excitateur.
A la résonance, l'amplitude des oscillations du résonateur est maximale.
Pour un résonateur peu amorti, la période de résonance est voisine de sa période propre.

B – L'exemple du pendule élastique en translation

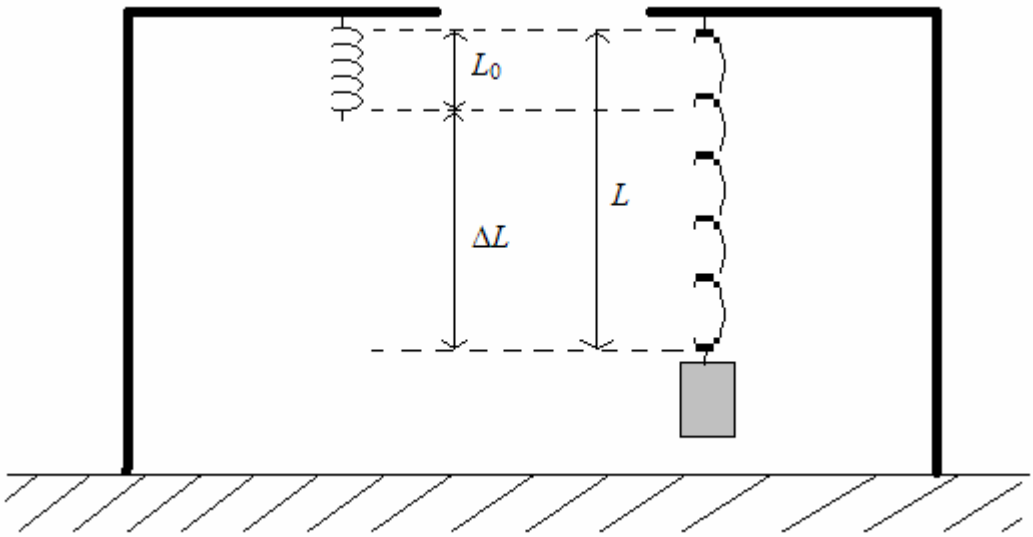
I – Caractéristiques du ressort

1) Constante de raideur d'un ressort et force de rappel

a. Détermination expérimentale

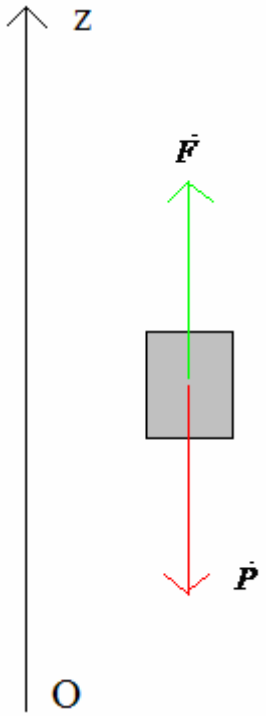
Description du dispositif :
On accroche un ressort de masse négligeable à spires non jointives sur un support vertical. On note L_0 la longueur à vide du ressort. On suspend une masse m à l'extrémité de ce ressort et on mesure la nouvelle longueur L du ressort. On en déduit l'allongement ΔL du ressort. Puis on recommence avec différentes masses.

Schéma :



Bilan des forces :

- Le poids $\vec{P}$.
- La force de rappel du ressort $\vec{F}$.

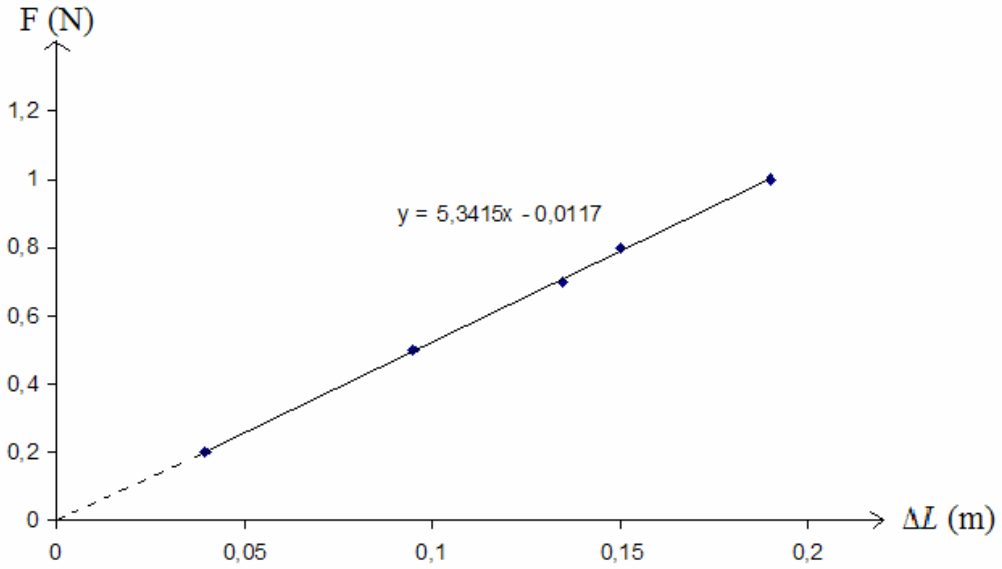


Détermination de la valeur de la force de rappel :

D'après la première loi de Newton : le système est dans un état d'équilibre : $\vec{P}+\vec{F}=\vec{0}$.

Par projection suivant un axe vertical orienté vers le haut : $-P+F=0$ d'où $P=F$ d'où $F=mg$.

Courbe représentant F en fonction de ΔL :



La courbe obtenue est une droite croissante passant par l'origine. On a donc F proportionnelle à ΔL. $F = k.\Delta L$, avec k la constante de raideur du ressort. k représente le coefficient directeur de la droite : k = 5,3 u.S.I.

b. Unité

$$[k] = \left[\frac{F}{\Delta L}\right] = \frac{\text{N}}{\text{m}} = \text{N.m}^{-1} = \text{kg.m.s}^{-2}.\text{m}^{-1} = \text{kg.s}^{-2}.$$

2) Caractéristiques de la force de rappel exercée par un ressort

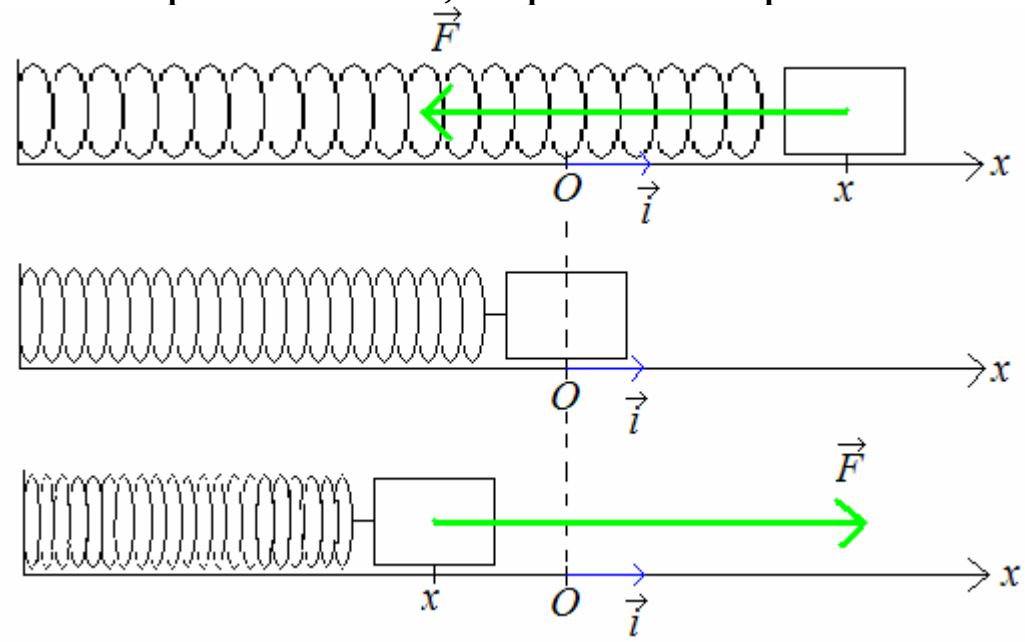
Dispositif expérimental :
On considère un mécanisme oscillant modélisé par un solide relié à l'une des extrémités d'un ressort ; l'autre extrémité du ressort étant fixe. Le solide peut coulisser sur un axe horizontal. Ce système constitue un oscillateur élastique en translation horizontale.

Bilan des forces appliquées sur le solide :

- Le poids $\vec{P}$.
- La force de rappel du ressort $\vec{F}$.
- La force exercée par le support $\vec{R}$.

Le mouvement étant horizontal : les composantes horizontales se compensent : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$.

Schémas en position d'étirement, à l'équilibre et en compression :



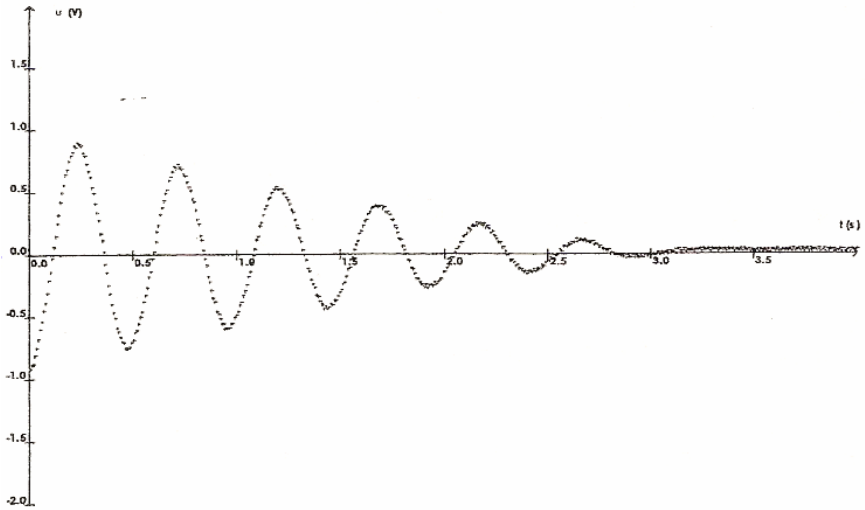
Caractéristiques de $\vec{F}$:

- Point d'application : le point de contact entre le solide et le ressort.
- Direction : l'axe du ressort.
- Sens : vers la position d'équilibre.
- Valeur : $F = k.\Delta L$, ici $\Delta L = x$ donc $F = k.x$.
- Aspect vectoriel : $\vec{F} = -k.x.\vec{i}$, $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de l'axe *Ox*.

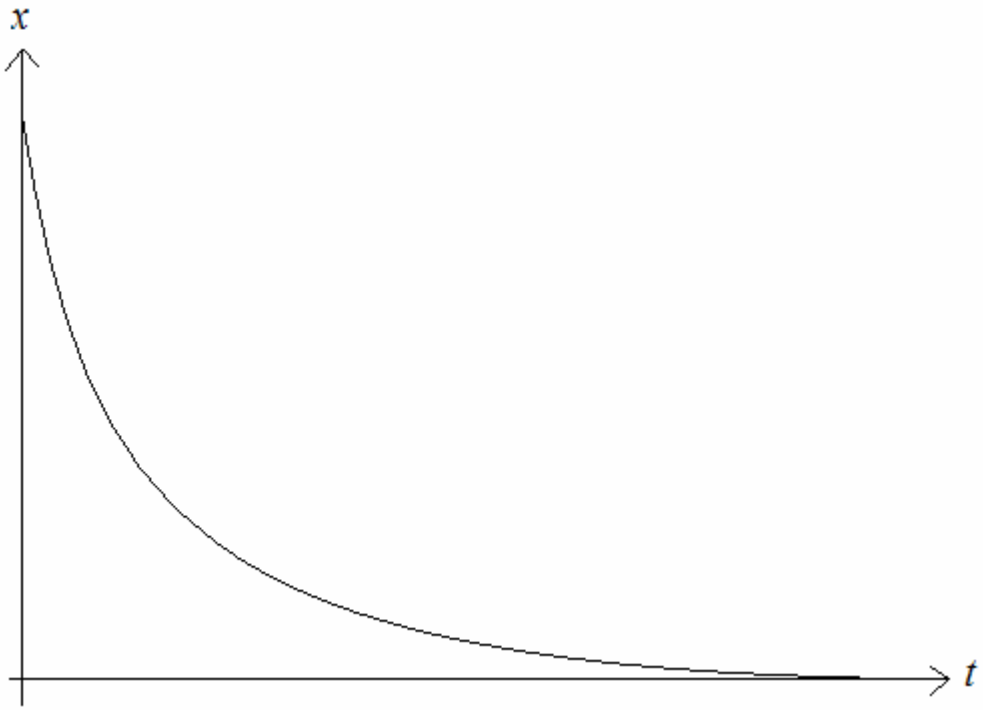
II – Oscillateur élastique en translation

1) Oscillations mécaniques libres amorties

On enregistre le mouvement du centre d'inertie d'un solide accroché à un ressort. On observe des oscillations mécaniques libres amorties : on parle de régime pseudo-périodique. Les oscillations diminuent d'amplitude à cause de l'ensemble des forces de frottements.



Si les frottements sont très importants : on observe un régime apériodique.

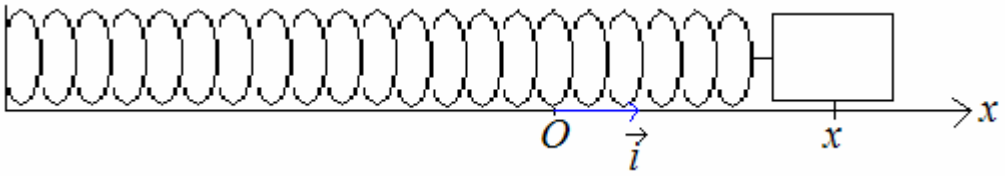


2) Oscillations mécaniques libres non amorties

Si les frottements deviennent négligeables : les oscillations sont périodiques. La pseudo-période devient la période propre du régime périodique.

a. Présentation des conditions de l'expérience

Dispositif expérimental :
On étudie le mouvement du système {masse} dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
A l'instant t :



Conditions initiales :
On lâche le système d'une position x_0 sans vitesse initiale.

Bilan des forces :

- Le poids $\vec{P}$.
- La réaction du support $\vec{R}$.
- La force de rappel du ressort $\vec{F}$.

Les frottements sont négligés.

b. Etablissement de l'équation différentielle du mouvement

D'après la deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m.\vec{a}_G$, $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m.\vec{a}_G$.

Par projection suivant l'axe Ox : $0 + 0 - F = m.a_x$ donc $-k.x = m.a_x$.

Or $\vec{a}_G = \dfrac{d\vec{v}_G}{dt}$ donc $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$ et $\vec{v}_G = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ donc $v_x = \dfrac{dx}{dt}$; donc $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$.

On a donc $-k.x = m.\ddot{x} = m.\dfrac{d^2x}{dt^2}$, $m.\ddot{x} + k.x = 0$.

D'où l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}.x = 0$ ou $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}.x = 0$.

c. Solution générale de l'équation différentielle

La solution générale est de la forme : $x(t) = X_m.\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$.

Avec :

- X_m : amplitude maximale des oscillations : abscisse maximale atteinte par le système.
- T_0 : période propre de l'oscillateur.
- φ : phase à l'origine des dates (constante qui dépend des conditions initiales.

d. Expression de la période propre de l'oscillateur

On injecte $x(t)$ dans l'équation différentielle $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}.x = 0$.

$x(t) = X_m.\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$.

$\dot{x}(t) = v_x(t) = -X_m.\dfrac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$.

$\ddot{x}(t) = a_x(t) = -X_m.\dfrac{4\pi^2}{T_0{}^2}.\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$.

Donc $-X_m.\dfrac{4\pi^2}{T_0}.\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) + \dfrac{k}{m}.X_m.\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = 0$.

$X_m.\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\left[-\dfrac{4\pi^2}{T_0{}^2} + \dfrac{k}{m}\right] = 0$.

Cette équation est vérifiée à toutes les dates, comme $x = X_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) \neq 0$. Donc $-\frac{4\pi^2}{{T_0}^2} + \frac{k}{m} = 0$, d'où $\frac{4\pi^2}{{T_0}^2} = \frac{k}{m}$ d'où ${T_0}^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$.

Donc $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Analyse dimensionnelle : $[T_0] = \text{s}$.

Montrons que $\sqrt{\frac{m}{k}}$ est homogène à un temps.

$$\left[\sqrt{\frac{m}{k}}\right] = \frac{\sqrt{[m]}}{\sqrt{[k]}} = \sqrt{\frac{\text{kg}}{\text{kg.s}^{-2}}} = \sqrt{\frac{1}{\text{s}^{-2}}} = \sqrt{\text{s}^2} = \text{s}.$$

III – Oscillations mécaniques forcées

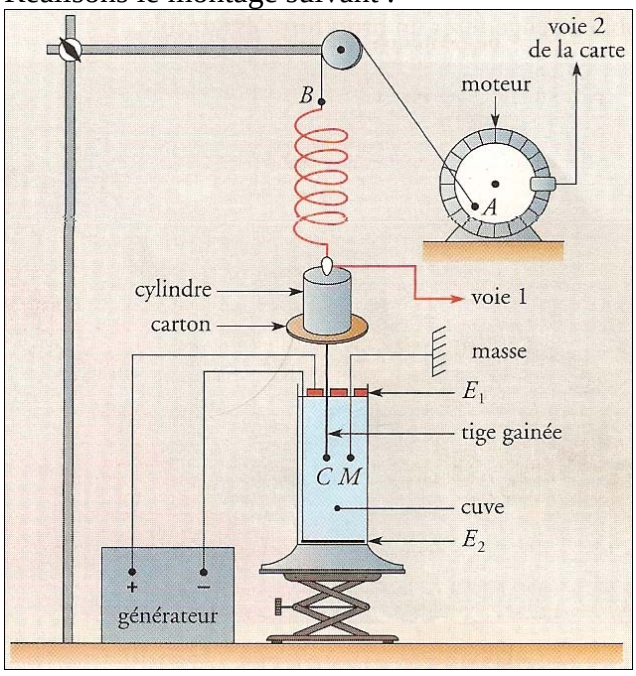
1) Excitateur et résonateur

a. Motivation

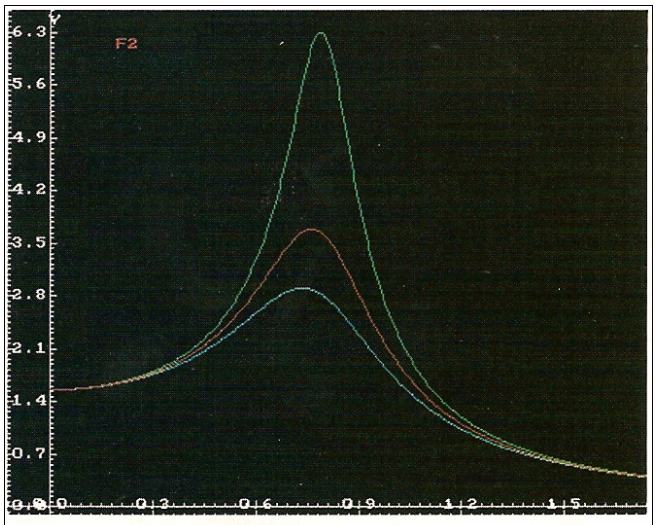
Il est connu que sur une piste ondulée régulièrement, la conduite automobile est difficile à certaines vitesses : les oscillations du véhicule prennent une amplitude telle que sa stabilité est menacée. Pourquoi l'oscillateur élastique, constitué de l'automobile et de sa suspension, peut-il avoir une amplitude d'oscillations importante lorsqu'il est soumis à une action extérieure périodique ?

b. Etude expérimentale

Réalisons le montage suivant :



Faisons varier la période de rotation du moteur entraînant la came (ou excentrique).
Notons l'amplitude des oscillations.
Accroissons les frottements à l'aide d'une rondelle en carton.
Observons l'effet de l'amortissement.



Trois résonances d'amplitude :
courbe verte : résonance aiguë.
courbe bleue : résonance floue.

c. Interprétation

L'activité a permis d'observer les oscillations forcées de l'oscillateur élastique soumis à une force périodique produite par un dispositif appelé excitateur.
Pour une fréquence particulière de la force excitatrice, l'amplitude des oscillations forcées est maximale : il y a résonance d'amplitude.
L'oscillateur est appelé résonateur.
Lorsque l'amortissement du résonateur est faible, l'amplitude des oscillations forcées à la résonance est très grande : la résonance est aigüe.
La période de résonance est alors voisine de la période propre.
L'accroissement de l'amortissement du résonateur se traduit par une diminution de l'amplitude des oscillations forcées et par une atténuation de la résonance : la résonance est alors floue.
La période de résonance s'écarte de la période propre de l'oscillateur.

2) Exemples de phénomènes de résonance mécanique

a. Le haut-parleur

La membrane d'un haut-parleur vibre avec la fréquence imposée par la force magnétique produite par le courant qui alimente la bobine placée dans le champ magnétique d'un aimant permanent.
L'amortissement est tel que la résonance est floue afin de ne pas privilégier des fréquences particulières.

b. Les automobiles

Lorsqu'une roue d'automobile n'est pas équilibrée (son centre d'inertie n'est pas sur l'axe de rotation de la roue), il apparaît une vibration gênante dans la conduite : le shimmy.
Si une partie de la carrosserie est mal serrée, elle peut se mettre en vibration avec une amplitude importante pour une certaine vitesse de l'automobile et engendrer un bruit fort désagréable.

c. Les machines tournantes

Les moteurs électriques, alternateurs et outils en rotation, peuvent se comporter comme une roue d'automobile. Un équilibrage défectueux entraîne des vibrations qui ont souvent des conséquences très dommageables pour la machine et son environnement.

d. Les ouvrages antisismiques

Les immeubles et les barrages construits dans les régions sismiques doivent être conçus de manière à éviter les résonances avec les éventuelles vibrations du sol.