Exercice de thermodynamique

Thermodynamique appliquée au corps humain

Partie A Equation de diffusion thermique

On considère un corps homogène (FIGURE 1, où les parties noires représentent un isolant thermique) de section droite S, de longueur L. La conductivité thermique du milieu est notée λ. On se place jusqu'à mention contraire en régime permanent. La température du matériau ne dépend que de x et sera notée $T(x)$. Les parois parallèles à l'axe x sont isolées thermiquement et on note $\vec{j} = j(x)\overrightarrow{e_x}$, le vecteur densité volumique de courant thermique et $\overrightarrow{e_x}$ un vecteur unitaire.

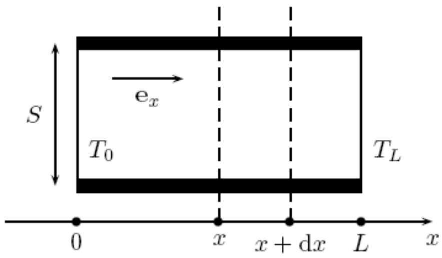

FIGURE 1 Conducteur thermique

QUESTION 1 Déterminer l'unité de $j(x)$ et rappeler sa signification physique. Rappeler la loi de FOURIER. Déterminer l'unité de λ.

$j(x)$ est une puissance surfacique, elle s'exprime en $\mathrm{W.m^{-2}}$. La loi de Fourier est en unidimensionnel : $\boxed{j(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}}$. En prenant en compte la loi précédente, on constate rapidement que l'unité de λ est $\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$.

QUESTION 2 En effectuant un bilan énergétique pour un volume élémentaire de matériau compris entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ entre les instants t et $x + \mathrm{d}t$, établir l'équation vérifiée par $j(x)$. En déduire l'expression vérifiée par $T(x)$.

On écrit que la variation de l'énergie du système compris entre x et $x+\mathrm{d}x$ correspond ici à la puissance qui rentre à laquelle on retire la puissance qui sort. Soient μ la masse volumique et c la capacité thermique massique du corps étudié. On a alors $j(x,t)S - j(x+\mathrm{d}x\,,t)S = \mu c S \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ qui peut encore s'écrire : $\frac{\partial j}{\partial x} + \mu c \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0$. Avec la loi de Fourier vue précédemment, on arrive à $\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\mu c}{\lambda}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}}$.

QUESTION 3 Donner les lois de variation de $T(x)$ et $j(x)$ en supposant que les extrémités du matériau sont maintenues à température constante, $T(0) = T_0$ et $T(L) = T_L$. Si $T_0 > T_L$, quel est le signe de j ? Justifier.

On est en régime stationnaire, la température est indépendante du temps. On a donc $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$. La température est une fonction affine de x. En tenant compte des conditions aux limites, on arrive à : $\boxed{T(x) = T_0 + \frac{T_L - T_0}{L}x}$. Par suite la puissance surfacique est uniforme : $j = \lambda \frac{T_0 - T_L}{L}$. Elle est positive, le flux thermique va de $x = 0$ vers $x = L$.

Partie B Résistance thermique due à la combustion

On définit P_{th} le flux thermique à travers la section droite S du matériau, c'est-à-dire l'énergie qui traverse la surface par unité de temps. On définit R_{th}, résistance thermique de conduction du matériau de longueur L et de surface S, par la relation $T_0 - T_L = R_{th}P_{th}$.

QUESTION 4 En écrivant la loi d'OHM locale, préciser l'analogie qui existe entre le problème de la conduction électrique et celui de la conduction thermique. Quelle est la grandeur électrique équivalente à P_{th} ? Quelle est la grandeur électrique équivalente à $T(0) - T(L)$?

En électricité, si γ est la conductivité thermique, la loi d'OHM est $\boxed{\vec{j} = \gamma\vec{E} = -\gamma\overrightarrow{\mathbf{grad}V}}$ en statique. On fait donc l'analogie entre la température T et le potentiel électrique V d'une part, et entre la puissance thermique P_{th} et l'intensité i d'autre part.

QUESTION 5 Comment sont reliés P_{th} et $j(x)$? Exprimer R_{th} en fonction de L, S et λ. Préciser l'unité de R_{th}.

On a $P_{th} = jS = \lambda S\frac{T_0 - T_L}{L}$, on en déduit l'expression de la résistance thermique : $\boxed{R_{th} = \frac{1}{\lambda}\frac{L}{S}}$ en $\mathrm{K.W^{-1}}$.

Partie C Association de résistance thermique

QUESTION 6 On associe deux corps A_1 et A_2 (FIGURE 2, où les parties noires représentent un isolant thermique) de résistances thermiques R_{th1} et R_{th2} de même section S, l'un de conductivité λ_1 est compris entre $x = 0$ et $x = L_1$, le second de conductivité thermique λ_2 est compris entre $x = L_1$ et $x = L_1 + L_2$. On note T_0, T_1 et T_2 les températures pour $x = 0$, $x = L_1$ et $x = L_1 + L_2$. Donner les expressions de R_{th1} et R_{th2}.

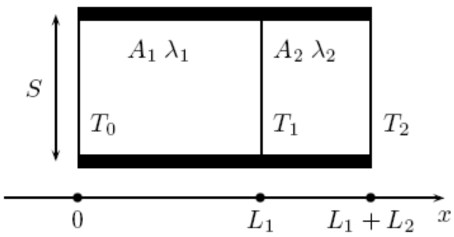

FIGURE 2 Première association

On a, par application directe de la question précédente : $\boxed{\boldsymbol{R_{th1} = \frac{1}{\lambda_1}\frac{L_1}{S}} \text{ et } \boldsymbol{R_{th2} = \frac{1}{\lambda_2}\frac{L_2}{S}}}$.

QUESTION 7 Justifier que la puissance thermique P_{th1} qui traverse A_1 est égale à la puissance thermique P_{th2} qui traverse A_2. Indiquer alors, en la justifiant, une analogie avec un problème d'électrocinétique.

Comme les bords des deux corps sont parfaitement calorifugés, la puissance thermique P_{th1} qui traverse A_1 est égale à la puissance thermique P_{th2} qui traverse A_2. On est dans le cadre d'un montage **série** de l'électricité.

QUESTION 8 Etablir l'expression de la résistance thermique R_{th} globale en fonction de R_{th1} et R_{th2}.

On a immédiatement $\boxed{\boldsymbol{R_{th} = R_{th1} + R_{th2}}}$.

QUESTION 9 En déduire la température T_1 en fonction de T_0, T_2, R_{th1} et R_{th2}.

Pour déterminer la température T_1, il est particulièrement habile de raisonner avec la notion de diviseur de tension prolongée ici sous la forme de diviseur d'écart de température. On écrit donc que : $T_1 - T_0 = \frac{R_{th2}}{R_{th1}+R_{th2}}(T_2 - T_0)$. On en déduit que : $\boxed{\boldsymbol{T_1 = T_0 + \frac{R_{th1}}{R_{th1}+R_{th2}}(T_2 - T_0)}}$.

QUESTION 10 Les deux corps A_1, de section S_1 et de longueur L_1 et A_2 de section S_2 et de longueur L_2 sont associés comme cela est représenté sur la FIGURE 3 (les parties noires représentent un isolant thermique). On note T_0, la température sur les faces d'entrée pour $x = 0$ et T_1, la température sur les faces de sortie en $x = L_1$ pour A_1 et en $x = L_2$ pour A_2. Les corps A_1 et A_2 sont isolés latéralement. Etablir l'expression de la résistance thermique R_{th} qu'ont définit par la relation $T_0 - T_1 = R_{th}P_{th}$, P_{th} étant la puissance thermique traversant l'ensemble des surfaces S_1 et S_2 à l'abscisse $x = 0$. On exprimera R_{th} en fonction de R_{th1} et R_{th2}. Indiquer, en la justifiant, une analogie avec un problème d'électrocinétique.

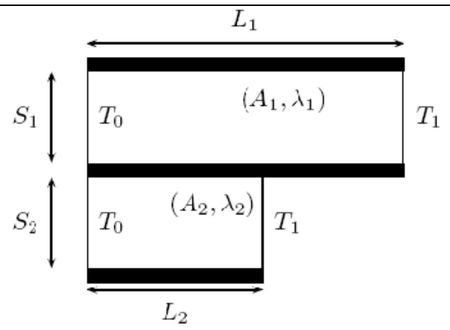

FIGURE 3 Seconde association

On constate que les deux corps étudiés sont soumis à la même différence de température. Cette situation est analogue de celle en électricité où deux dipôles sont soumis à la même tension. Ils sont donc montés en parallèle. La résistance thermique équivalente aux deux résistances est donc : $\boxed{\boldsymbol{R_{th} = \frac{R_{th1}R_{th2}}{R_{th1}+R_{th2}}}}$.

Partie D Transfert convectif et transfert radiatif

QUESTION 11 Un corps de température T, plongé dans un fluide (ici, de l'air) à la température T_a, échange avec celui-ci par convection au niveau de sa surface S une puissance thermique P_{th} sortant algébriquement du corps : $P_{th} = \alpha S(T - T_a)$ avec $\alpha = 4\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}}$. On gardera cette valeur de α dans la suite du problème. Nous sommes toujours en régime permanent. Par analogie au cas précédent, montrer que cet échange convectif est décrit par une résistance thermique R_{thc} que l'on précisera.

Avec la définition proposée, on a immédiatement $\boxed{\boldsymbol{R_{th} = \frac{T-T_a}{P_{th}} = \frac{1}{\alpha S}}}$.

QUESTION 12 Un corps de température T, plongé dans un fluide (ici, de l'air) à la température T_a, échange avec celui-ci par rayonnement au niveau de sa surface S une puissance thermique P_{thr} sortant algébriquement du corps : $P_{thr} = KS(T - T_a)$ avec $K = 5\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}}$ (relation valable si l'écart de température est faible). Ce mécanisme provient du rayonnement infrarouge émis par le corps et les murs à une température donnée. On est toujours en régime permanent. Par analogie avec le cas précédent, montrer que cet échange radiatif est aussi décrit par une résistance thermique de rayonnement R_{thr} que l'on précisera.

Par analogie avec ce qui précède, on a : $\boxed{\boldsymbol{R_{thr} = \frac{1}{KS}}}$.

Partie E Etude du corps humain

Nous allons étudier le maintien de l'homéothermie chez l'homme debout nu et au repos à l'exposition d'une température confortable. La surface du corps $S = 1{,}5\ \mathrm{m^2}$ est modélisable par une isotherme à $T = 33\ °\mathrm{C}$. La température de la pièce est prise à $T_a = 23\ °\mathrm{C}$. Nous nous plaçons en régime permanent. Les échanges thermiques s'effectuent par radiation, convection, évaporation. Ces pertes sont compensées par la production métabolique. En moyenne, un homme produit 13000 kJ par jour.

QUESTION 13 Evaluer la puissance P_M fournie par le métabolisme.

La puissance métabolique est le rapport de la production d'énergie sur la durée : $\boxed{\boldsymbol{P_M = \frac{E}{\Delta t} = 150\ \mathrm{W}}}$.

QUESTION 14 Evaluer la résistance thermique de rayonnement R_{thr} pour un homme. Exprimer et évaluer la puissance P_r émise par rayonnement.

On trouve $R_{thr} = 0{,}133\ \mathrm{K.W^{-1}}$ pour un homme et $\boxed{\boldsymbol{P_r = 75\ \mathrm{W}}}$.

QUESTION 15 Evaluer la résistance thermique de convection R_{thc} pour un homme. Exprimer et évaluer la puissance P_c émise par convection.

On trouve $R_{thc} = 0{,}167\ \mathrm{K.W^{-1}}$ et $\boxed{\boldsymbol{P_c = 60\ \mathrm{W}}}$ pour la convection.

QUESTION 16 L'organisme émet toujours de l'eau par les voies respiratoires et par sa surface cutanée. Evaluer cette puissance P_E si la chaleur latente de changement d'état à la température de la peau est $L \approx 2400\ \mathrm{kJ.kg^{-1}}$ et que la masse d'eau vaporisée est $m = 300$ g par jour.

On a $\boxed{\boldsymbol{P_E = \frac{mL}{\Delta t} = 8{,}3\ \mathrm{W}}}$.

QUESTION 17 A partir d'un bilan de puissance, en déduire la puissance résiduelle P_{res} servant à réchauffer l'air inspiré.

Puisque l'on est en régime permanent, toute la puissance métabolique doit être évacuée sinon la température du corps humain ne ferait que monter ou que descendre. On a donc : $P_M = P_{thc} + P_{thr} + P_E + P_{res}$. On trouve que $\boxed{\boldsymbol{P_{res} = 6{,}7\ \mathrm{W}}}$.

QUESTION 18 Soit le circuit électrique de la FIGURE 4, préciser l'équation reliant les différentes grandeurs électriques de ce circuit.

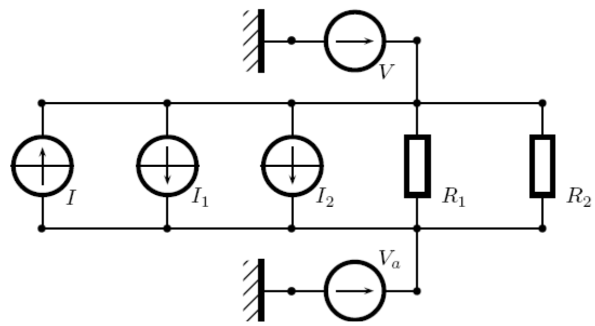

FIGURE 4 Modèle électrique

On écrit la loi des nœuds et on obtient : $\boxed{\frac{V-V_a}{R_1}+\frac{(V-V_a)}{R_2}+I_1+I_2=I}$. Le montage électrique proposé n'est pas satisfaisant, il correspond à la situation étudiée sur le plan thermique uniquement si les générateurs ne débitent pas de courant. L'image proposée n'est pas bonne.

QUESTION 19 Indiquer clairement les équivalents thermiques correspondants aux divers éléments électriques du circuit de la FIGURE 4.

Les générateurs de tension proposés sont équivalents aux températures T et T_a. Les résistances R_1 et R_2 correspondent aux résistances thermiques de convection et de rayonnement et enfin les générateurs de courant aux puissances métaboliques (pour I), résiduelle ainsi qu'à la puissance liée à l'évaporation.

QUESTION 20 Un homme habillé a 80 % de sa surface recouverte d'un vêtement. On néglige le rayonnement et la convection des vêtements, si bien que ne subsiste plus que la conduction au travers de ceux-ci. Expliquer d'une part pourquoi cela va nécessiter d'introduire, dans le schéma de la FIGURE 4, une résistance supplémentaire R_3 et d'autre part comment il faut modifier les valeurs des résistances R_1 et R_2. Nous noterons R_1' et R_2' les nouvelles valeurs des résistances remplaçant R_1 et R_2. Donner le lien de R_1' et R_2' avec R_1 et R_2. Comment se présente le circuit électrique équivalent ?

On doit ajouter une résistance en parallèle supplémentaire dans le circuit initial. En ce qui concerne les résistances R_1 et R_2, la surface S diminue. Cela modifie ces résistances thermiques, en fait on les augmente car en réduisant les sections on diminue automatiquement les flux thermiques. La nouvelle surface est $S'=\frac{1}{5}S$, il s'ensuit que $\boxed{R_i'=5R_i}$. En mettant des habits, on augmente les résistances thermiques, c'est bien le but premier recherché lorsqu'on s'habille.

QUESTION 21 Exprimer la résistance thermique des vêtements R_{vet} conduisant à la même puissance du métabolisme dans une pièce à la température $T_a'=20$ °C.

On a $\boxed{R_{vet}=\frac{T-T_a'}{P_M}=0{,}087\ \mathrm{K.W^{-1}}}$.

QUESTION 22 On revient à l'homme nu. La pression de la pièce est supposée constante et égale à $P_0=10^5$ Pa. On tient compte de la capacité thermique à pression constante, C du corps humain. On admet que les relations $R_{th}P_{th}=\Delta T$ restent valables en régime lentement variable. En faisant un bilan énergétique entre deux instants t et $t+dt$, sur le corps humain à une température uniforme, $T(t)$, montrer que la température vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{T_a-T}{\tau}+B$$

en donnant l'expression de τ et B.

On écrit de façon très classique le bilan énergétique du corps humain : $C\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = P_{entre} - P_{sort} + P_{cr}$. Ici, on ne compte aucune puissance entrante, la puissance sortante est $\frac{T-T_a}{R_{th}}$ et la puissance créée est la puissance liée au métabolisme. L'équation finale après mise en forme est donc : $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{T}{R_{th}C} = \frac{T_a}{R_{th}C} + \frac{P_M}{C}$. On identifie les coefficients : $\boxed{\boldsymbol{\tau = R_{th}C} \textbf{ et } \boldsymbol{B = \frac{P_M}{C}}}$. L'étude proposée ici est un peu douteuse car la transpiration se produit lorsque la température de 37 °C du corps est réalisée. Si on envisage une montée en température sous l'effet du métabolisme, il ne faut sans doute pas considérer P_E. On peut proposer éventuellement une solution avec $B = \frac{P_M - P_E - P_{res}}{C}$ sans que cela soit très convaincant.

QUESTION 23 Comment doit être modifié le circuit de la FIGURE 4 pour tenir compte de cette capacité ?

Il faut ajouter dans le circuit un condensateur en parallèle des résistances R_1 et R_2.

QUESTION 24 Sachant qu'un corps dans l'eau refroidit 25 fois plus vite que dans l'air, estimer la résistance convective $R_{thc/eau}$ du corps humain dans l'eau. On admettra que la résistance du rayonnement n'est pas modifiée.

La constante de temps étant proportionnelle à la résistance thermique, cela signifie que la résistance thermique dans l'eau est 25 fois plus faible que celle dans l'air. Or, en tenant compte de ce que l'on a vu avant, la résistance thermique dans l'air correspond à la mise en parallèle des deux résistances thermiques : $R_{air} = \frac{R_{thc}R_{thr}}{R_{thc}+R_{thr}}$. On trouve : $R_{air} = 0{,}074\ \mathrm{K.W^{-1}}$. La résistance thermique de l'eau est donc : $\boxed{\boldsymbol{R_{eau} = 3 \times 10^{-3}\ \mathrm{K.W^{-1}}}}$.

Partie F Etude expérimentale

Pour vérifier que le corps humain est le siège d'un transfert thermique, on enferme $N = 36$ personnes dans une pièce parallélépipédique pendant 2 heures et on enregistre la température de la pièce au cours du temps en présence et en l'absence de ces mêmes personnes. La température des murs est égale à celle de l'air de la pièce. La puissance émise par une personne est du type $P = \beta(T_{peau} - T)$. De même, une partie de l'énergie de la pièce est perdue par fuites avec l'extérieur. Cette puissance perdue P_f est modélisée par $P_f = \beta'(T - T_{ext})$. La pression de la pièce est supposée constante et égale à $P_0 = 10^5$ Pa.

QUESTION 25 Exprimer et évaluer C_{pa}, la capacité thermique à pression constante de l'air de la pièce sachant que les dimensions sont $\ell = 7{,}5$ m, $L = 10$ m et $h = 4$ m. L'air est assimilé à un gaz parfait diatomique pour lequel $\gamma = 1{,}4$. La température sera prise égale à 20 °C et on admettra que C_{pa} restera constante dans la suite du problème.

D'après la loi de MAYER, on a $c_p - c_v = R$ si on considère les capacités thermiques molaires. Avec la définition de γ, on a donc $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$. Il reste à calculer le nombre de moles d'air contenues dans la pièce. On applique la loi des gaz parfaits : $p_0V = nRT$. On peut ensuite exprimer la capacité thermique (à pression constante) associée à l'air de la pièce : $\boxed{\boldsymbol{C_{pa} = \frac{\gamma P_0 V}{(\gamma-1)T}}}$. On trouve numériquement : $C_{pa} = 3{,}6 \times 10^5\ \mathrm{J.K^{-1}}$.

$\boxed{\text{QUESTION } \mathbf{26}}$ On admet que la capacité thermique des murs et des objets est d'environ $C_m = 3 \times 10^5\ \mathrm{J.K^{-1}}$ et celle des personnes est négligée. De plus, on considère qu'à chaque instant t, la température $T(t)$ des murs et de la pièce est uniforme. Montrer que la température obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_\infty}{\tau}$$

Donner, dans les deux cas où la pièce contient N personnes et où la pièce ne contient aucune personne, les expressions de τ et T_∞ en fonction de C_{pa}, C_m, N, β, β', T_{peau} et T_{ext}.

Pour effectuer le bilan énergétique, il faut sommer les deux capacités thermiques C_{pa} et C_m. La puissance produite par les personnes est $N\beta\left(T_{peau} - T\right)$. Les fuites thermiques représentent une puissance $\beta'(T - T_{ext})$. L'équation différentielle du bilan thermique est alors : $\left(C_{pa} + C_m\right)\frac{dT}{dt} = N\beta\left(T_{peau} - T\right) - \beta'(T - T_{ext})$. On peut la réécrire selon : $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{(N\beta+\beta')}{C_{pa}+C_m}T = \frac{N\beta T_{peau}+\beta' T_{ext}}{N\beta+\beta'}$. On obtient donc le temps caractéristique $\boxed{\boldsymbol{\tau = \frac{C_{pa}+C_m}{N\beta+\beta'}}}$ et la température en régime permanent $\boxed{\boldsymbol{T_\infty = \frac{N\beta T_{peau}+\beta' T_{ext}}{N\beta+\beta'}}}$. Pour obtenir l'équation différentielle dans le cas où il n'y a personne dans la pièce, il suffit de prendre $N = 0$.

$\boxed{\text{QUESTION } \mathbf{27}}$ En déduire l'expression de la température (on ne demande pas de déterminer les constantes d'intégration) en présence des N personnes et en l'absence de ces mêmes personnes.

L'intégration de l'équation différentielle est aisée : $\boxed{\boldsymbol{T(t) = T_\infty + A \exp -\frac{t}{\tau}}}$. Dans le cas particulier où $N = 0$, on a $T_\infty = T_{ext}$ et $\tau = \frac{C_{pa}+C_m}{\beta'}$.

$\boxed{\text{QUESTION } \mathbf{28}}$ La modélisation des températures enregistrées exprimées en °C donne :

$$\begin{cases} \theta = 23{,}0 - 3{,}0 \exp -\dfrac{t}{2000} & \text{en présence des personnes} \\ \theta = 21{,}0 - 1{,}0 \exp -\dfrac{t}{2400} & \text{en l'absence des personnes} \end{cases}$$

Le temps est exprimé en secondes. En déduire β, β', T_{ext} et T_{peau}. Commenter.

A partir de la remarque précédente, on peut immédiatement conclure que $\boxed{\boldsymbol{T_{ext} = 21\ °C}}$. On observe ensuite que le rapport des temps caractéristiques pour N personnes τ_N et pour la pièce vide τ_0 est $\frac{\tau_0}{\tau_N} = 1 + \frac{N\beta}{\beta'}$. D'après les enregistrements réalisés, on a $\frac{\tau_0}{\tau_N} = 1{,}2$. Cela nous amène à la première relation $\frac{N\beta}{\beta'} = 0{,}2$. En utilisant le temps caractéristique $\tau_N = 2000$ s, on peut écrire que $1{,}2\,\beta' = \frac{C_{pa}+C_m}{\tau_N}$ et trouver que $\boxed{\boldsymbol{\beta' = 275\ \mathrm{W.K^{-1}}}}$ et ensuite $\boxed{\boldsymbol{\beta = 0{,}2\,\frac{\beta'}{N} = 1{,}5\ \mathrm{W.K^{-1}}}}$. Enfin, d'après la formule donnant la température en régime permanent, on a $\left(1+\frac{N\beta}{\beta'}\right)T_{\infty,N} = \frac{N\beta}{\beta'}T_{peau} + T_{ext}$. On trouve que : $\boxed{\boldsymbol{T_{peau} = 33\ °\mathrm{C}}}$ ce qui correspond à la valeur proposée en début d'énoncé.