# Cours de mathématiques

# Théorème du point fixe dans un espace vectoriel normé

**THEOREME 1** Théorème du point fixe

Soient $(E, \|.\|)$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $d$ la distance associée à $\|.\|$.
Soit $F \in \mathcal{B}(E)$, $f: F \to F$ une application.

Si $F$ est complète et si $f$ est contractante, alors $f$ admet un point fixe et un seul, et, pour tout $a$ de $F$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers le point fixe de $f$.

**RAPPELS 2**

- $x$ est un **point fixe** de $f$ si, et seulement si, $f(x) = x$.
- $f$ est **contractante** si, et seulement si, il existe $k \in [0; 1[$ tel que :

$$\forall (x, y) \in F^2, d\big(f(x), f(y)\big) \leq kd(x, y)$$

**PREUVE 3** Théorème du point fixe

1) Si $x$, $y$ sont deux points fixes de $f$ alors : $d(x, y) = d\big(f(x), f(y)\big) \leq kd(x, y)$ d'où $d(x, y) = 0$ puisque $k \in [0; 1[$. Ainsi $f$ admet au plus un point fixe.
2) Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de $f$.
   - ❖ Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $F$. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :

$$d(u_n, u_{n+1}) = d\big(f(u_{n-1}), f(u_n)\big) \leq kd(u_{n-1}, u_n)$$

d'où, par récurrence :

$$d(u_n, u_{n+1}) \leq k^n d(u_0, u_1)$$

Puis, pour tout $(p, r)$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ :

$$d\big(u_p, u_{p+r}\big) \leq \sum_{i=0}^{r-1} d\big(u_{p+i}, u_{p+i+1}\big) \leq \sum_{i=0}^{r-1} k^{p+i} d(u_0, u_1)$$

$$= k^p \frac{1-k^r}{1-k} d(u_0, u_1) \leq k^p \frac{d(u_0, u_1)}{1-k}$$

Soit $\varepsilon > 0$ ; puisque $k^p \frac{d(u_0,u_1)}{1-k} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \left( p \geq N \Longrightarrow k^p \frac{d(u_0, u_1)}{1-k} \leq \varepsilon \right)$$

On a alors :

$$\forall (p, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \left( p \geq N \Longrightarrow d\left(u_p, u_{p+r}\right) \leq \varepsilon \right)$$

et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $F$.

❖ Puisque $F$ est complet, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément $l$ de $F$. Comme $f$ est continue (car $k$-lipschitzienne), on déduit $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(l)$.

Mais d'autre part $u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$. Finalement : $f(l) = l$.

❖ ❖ ❖