Exercices de thermodynamique

Transferts thermiques conductifs

1 Plaque dans une pièce isolée thermiquement

ENONCE

Une plaque d'acier (c, λ, ρ) de masse m et d'épaisseur e est placée dans une pièce isolée thermiquement. Entre la plaque et le mur de la pièce, l'air (h), est à la température T_a.

Ecrire l'équation régissant l'évolution de la température de la plaque $T(t)$ et évaluer le temps caractéristique de conducto-convection.

Données :
$T_a = 25\ °\mathrm{C}$,
$\rho = 7{,}86.10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$,
$c = 460\ \mathrm{J.K^{-1}.kg^{-1}}$,
$\lambda = 61\ \mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$,
$h = 150\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}}$,
$e = 2{,}5\ \mathrm{mm}$.

Solution

Hypothèses de départ :

Pour simplifier, on considérera que la température est uniforme dans la plaque.
La plaque étant immobile dans le référentiel d'étude, $dE_C = 0$.
Le volume est supposé constant donc $\delta W_{\text{pression}} = 0$.

Application du premier principe :

D'après le premier principe de la thermodynamique : $dU = \delta Q$,
avec $dU = CdT = mcdT(t)$ et $\delta Q = -\Phi_{cc}dt - \Phi_R dt$,
avec $\Phi_{cc} = hS(T(t) - T_a)$ et $\Phi_R = ?$.

Assimilation de la plaque à un corps noir :

Supposons que la plaque est un corps noir.
Alors $\Phi_R = \Phi_e - \Phi_a = \sigma T(t)^4 - \sigma {T_a}^4$,
car il existe un rayonnement d'équilibre avec les parois (ici à la température T_a).

Si $T(t) = T_a$, on peut linéariser : $\Phi_R = h_r S(T(t) - T_a)$,
avec $h_r = 4\sigma T_m{}^3$ $(\approx 4\sigma T_a{}^3)$.

Etablissement de l'équation différentielle d'évolution de la température de la plaque :

On a donc : $mc\frac{dT(t)}{dt} = -h_T S(T(t) - T_a)$,
avec $h_T = h + h_r$.
D'où :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dT(t)}{dt} + \frac{h_T S}{mc}(T(t) - T_a) = 0}}$$

Et on se donne la condition initiale : $T(0) = T_0 > T_a$.

Considérations autour de la constante de temps :

On a $\tau = \frac{mc}{h_T S}$.
Posons $\theta = T(t) - T_a$.
Alors $\dot{\theta} + \frac{\theta}{\tau} = 0$ et donc :
$T(t) - T_a = (T_0 - T_a)e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Représentation graphique :

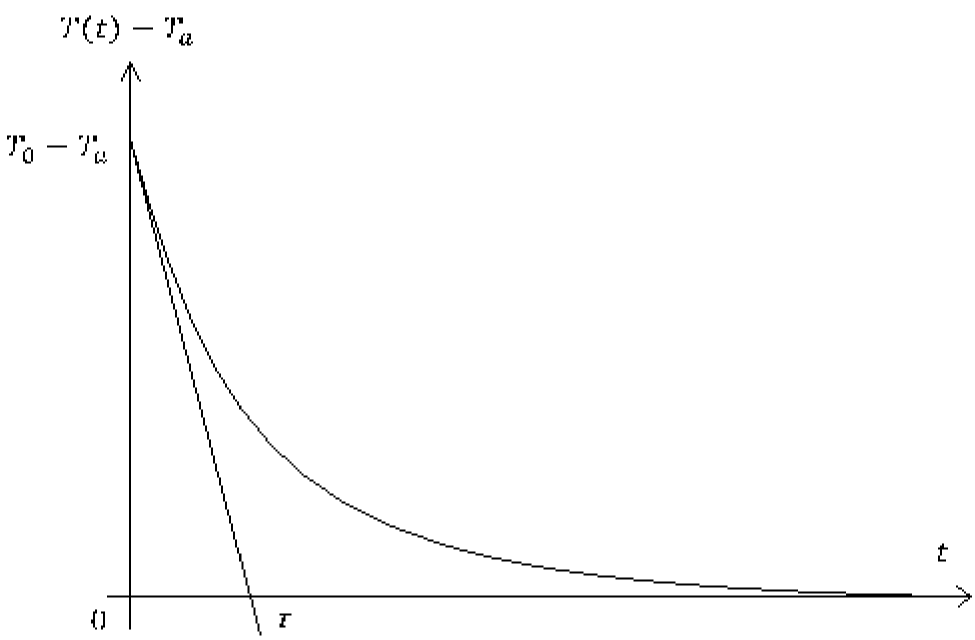

FIGURE 1 Evolution temporelle de $T(t) - T_a$

Graphiquement (FIGURE 1), la courbe concorde avec ce à quoi on peut s'attendre, la température de la plaque décroît pour s'uniformiser avec la température de l'air ambiant et des parois de la pièce.

Estimation du temps caractéristique de conducto-convection :

On a $h_r = 4\sigma {T_0}^3 \approx 6\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}}$ (en prenant $\sigma = 5{,}671.10^{-8}\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-4}}$), puisque h est donné le plus souvent à 10 %.
On peut négliger le terme radiatif par rapport au terme conducto-convectif. Dans ce cas :
$\tau = \frac{mc}{hS} = \tau_{cc}$ est le temps caractéristique de conducto-convection.
$\tau_{cc} = \frac{\rho c V}{hS} = \frac{\rho c S e}{hS}$, d'où :

$$\boxed{\boldsymbol{\tau_{cc} = \frac{\rho c e}{h}}}$$

Application numérique :

$$\boldsymbol{\tau_{cc} = 1\ \mathrm{min}}$$

2 Conduction dans une barre

ENONCE

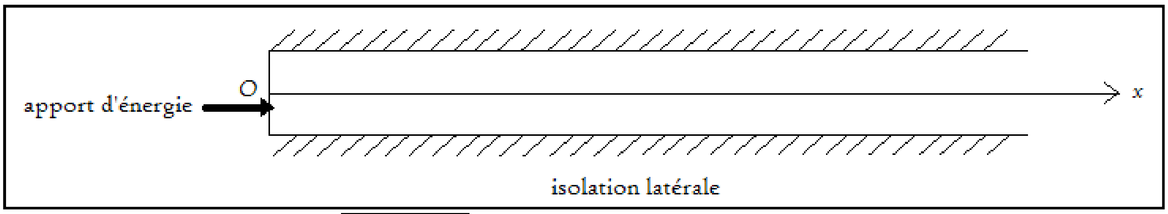

FIGURE 2 Schéma du montage étudié

On apporte de l'énergie à une extrémité (en $x = 0$) d'une barre isolée latéralement (FIGURE 2). Avant l'apport d'énergie, la barre est à une température uniforme T_0.

1. Soit M un point de la barre repéré par son abscisse x. Justifier la raison pour laquelle $T(M,t) = T(x,t)$.

2. Ecrire l'équation différentielle régissant l'évolution de $T(x,t)$.
On impose la condition en $x = 0$:

$$T(0,t) = T_0 + \alpha \cos(\omega t)$$

avec $\alpha > 0$ et $\omega = \frac{2\pi}{\mathcal{T}}$, $\mathcal{T}$ la période.

3. Trouver la température en régime sinusoïdal entretenu.

Solution

1.

L'ensemble des points de la barre ayant pour abscisse x est une surface isotherme (c'est un plan perpendiculaire à l'axe $x'x$). Si elle ne l'était pas, il y aurait une composante radiale de $\overrightarrow{j_{cd}}$, c'est-à-dire un transfert thermique latéral interdit par l'isolation.

2.

Définition du système :

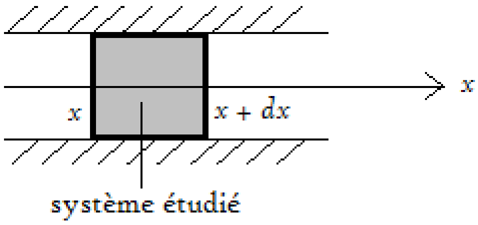

FIGURE 3 *Système étudié*

On étudie une tranche comprise entre x et $x + dx$ (FIGURE 3).

Application du premier principe :

Le premier principe donne : $dE_C + dU = \delta Q + \delta W$.
$dU = CdT = (\rho S dx)cdT$ si on néglige les variations de volume,
$\delta W = \delta W_{\text{pression}} = 0$, $\delta Q = -\Phi_{cd} dt$.

Etablissement de l'équation différentielle :

$$\Phi_{cd} = \iint_S \overrightarrow{j_{cd}}.C\,dS = \left(j_{cd}(x+dx,t)\overrightarrow{u_x}.\underbrace{\overrightarrow{u_x}}_{\vec{n}}\right)S + \left(j_{cd}(x,t)\overrightarrow{u_x}.(-\overrightarrow{u_x})\right)S,$$

$$\rho c S dx dT = -\left(j_{cd}(x+dx,t) - j_{cd}(x,t)\right)S dt$$

$$= \underbrace{j_{cd}(x,t)Sdt}_{\substack{\text{énergie qui}\\ \text{entre par } S(x)}} - \underbrace{j_{cd}(x+dx,t)Sdt}_{\substack{\text{énergie qui}\\ \text{sort par } S(x+dx)}}$$

$$= -\frac{\partial j_{cd}}{\partial x} S dx dt$$

Utilisation de la loi de FOURIER :

D'après la loi de FOURIER, $\overrightarrow{j_{cd}} = -\lambda \overrightarrow{grad} T(x,t) = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\overrightarrow{u_x}$, d'où :

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{\partial \boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{\rho c}}\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{\partial \boldsymbol{x}^2} = a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}}$$

3.

Définition des grandeurs étudiées :

Posons $\theta(x,t) = T(x,t) - T_0$.
Alors $\theta(x,t) = Re\left(\underline{\theta}(x,t)\right)$ avec $\underline{\theta}(x,t) = \underline{\theta_0}(x)e^{j\omega t}$ $(j^2 = -1)$.

Résolution :

$j\omega = \underline{\theta_0}(x) = a\underline{\ddot{\theta}_0}(x)$,

Solution en e^{rx} : $\frac{j\omega}{a} = r^2 = e^{j\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{a}$.

$r_1 = \sqrt{\frac{\omega}{a}}e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\omega}{a}}\frac{1+j}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1+j)$,

$r_2 = -\sqrt{\frac{\omega}{a}}e^{j\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1+j)$.

D'où :

$\underline{\theta_0}(x) = A_1 e^{\sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1+j)x} + A_2 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1+j)x}$.

Puis :

$$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = Re\left(\underline{\theta_0}(x)e^{j\omega t}\right) = \boldsymbol{Re}\left(\underbrace{\boldsymbol{A_1 e^{j\omega t}e^{\sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1+j)x}}}_{\text{terme en } e^{\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x}} + \underbrace{\boldsymbol{A_2 e^{j\omega t}e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1+j)x}}}_{\text{terme en } e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x}}\right).$$

Utilisation des conditions physiques pour déterminer les constantes :

Comme on ne peut avoir $T(\infty,t) \to \infty$, il faut choisir $\boldsymbol{A_1 = 0}$.
Avec la condition en $x = 0$: $\theta(0,t) = \alpha\cos(\omega t)$ ou $\underline{\theta}(0,t) = \alpha e^{j\omega t}$, on trouve $\boldsymbol{A_1 = \alpha}$.

Solution finale :

$\boxed{\boldsymbol{T(x,t) - T_0 = \alpha e^{-\frac{x}{\delta}}\cos\left(\omega t + \frac{x}{\delta}\right)}}$ avec $\boxed{\boldsymbol{\delta = \sqrt{\frac{\omega}{2a}}}}$ homogène à une longueur.

❖ ❖ ❖