Exercice 3 (5 points)
Pour les candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

1°) On considère l'équation du deuxième degré dans $\mathbb{C}$:

$$z^2 - (8+4i)z + 15 + 16i = 0 \qquad (1)$$

Montrer qu'en posant $Z = z - 2i$ (donc $z = Z + 2i$) on obtient l'équation à coefficients réels suivante :

$$Z^2 - 8Z + 19 = 0 \qquad (2)$$

Résoudre l'équation (2) dans $\mathbb{C}$ puis en déduire les solutions de (1).

2°) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, d'unité graphique 2 cm.
Soit A, B, C les points d'affixe $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 4 + i(2-\sqrt{3})$, $z_C = 4 + i(2+\sqrt{3})$.
On considère la transformation r d'écriture complexe :

$$z' = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z + (\frac{1}{2} + \sqrt{3}) + i(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

a) Justifier qu'il s'agit d'une rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) Vérifier que $r(B) = C$. En déduire la nature du triangle ABC.

c) On cherche maintenant les coordonnées du centre Ω du cercle Γ circonscrit au triangle ABC : on appelle A' le milieu de $[BC]$; calculer $z_{A'}$; en déduire que l'ordonnée de Ω est 2 ; déterminer alors z_Ω en posant $z_\Omega = x + 2i$ (avec x réel).

d) A partir de cette question, on admet que $z_\Omega = 3 + 2i$.
Faire une figure précise en plaçant Ω, le cercle Γ, et les points A, B, C.

3°) On considère le cercle unité (de centre O, et de rayon 1) et le triangle IJK équilatéral tel que $z_I = -1$, $z_J = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $z_K = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
Déterminer deux transformations géométriques simples que l'on peut appliquer successivement à IJK pour obtenir ABC .
Déterminer la formule complexe de chacune de ces transformations puis de la composée des deux, notée f.
Vérifier alors cette formule pour le point I.
Quelle est la nature de la transformation f ?

• Pt invariant ~~…~~ $\Delta(\delta)$ $\quad f(\Delta) = \Delta$

$\delta = 2\delta + z_\Omega$

• $z'' - \delta$ en fct de $z - \delta$