Exercice 4 (8 points)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{2}(\ln x - \dfrac{3}{2}) \text{ pour } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1°) f est-elle continue en 0 ?
2°) Calculer la limite de f en $+\infty$.
3°) Etudier la dérivabilité de f en 0.
Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(x)$ sur cet intervalle.
4°) Etudier le sens de variation de f et en dresser le tableau de variation.
5°) On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
a) Donner l'équation de la tangente T à la courbe au point A d'abscisse 1.
b) On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = f(x) + x - \dfrac{1}{4}$. Calculer $h'(x)$ et $h''(x)$.
Etudier le sens de variation de h' et en déduire le signe de h' sur $]0;+\infty[$.
c) Etudier le sens de variation de h et en déduire la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente T.
6°) Construire la courbe $\mathcal{C}$, la tangente T, ainsi que les tangentes aux points où $\mathcal{C}$ rencontre (Ox).