Corrigé Bac blanc du 3 mars 2005

Exercice 1

1°) On pose $g(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
La fonction exp étant dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \exp(-x)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction $x \mapsto -\exp'(-x) = -\exp(-x)$.
g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$,comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :
$g'(x) = \exp'(x)\exp(-x) + \exp(x)(-\exp'(-x)) = \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$ 0,5
Comme $g' = 0$ sur $\mathbb{R}$, g est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
On a $g(0) = 1$. Donc $g(x) = 1$ pour tout réel x. 0,5

2°) Soit f définie par $f(x) = \exp(a+x)\exp(-x)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) et :
$f'(x) = \exp'(a+x)\exp(-x) + \exp(a+x)(-\exp'(-x)) = 0$ (car $\exp' = \exp$). 0,5
Puisque $f' = 0$, f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$
On a $f(0) = \exp(a)$. Donc $f(x) = \exp(a)$ pour tout réel x.
Par suite, $\exp(a+x)\exp(-x) = \exp(a)$ pour tout réel x.

En posant $x = b$ et en utilisant le fait que $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ d'après 1°), on déduit alors facilement que pour tous réels a et b, $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$. 0,5

3°) On raisonne par récurrence.
L'égalité est vraie pour $n = 0$: $\exp(0a) = \exp(0) = 1$ et $(\exp(a))^0 = 1$.
Supposons la vraie pour un entier naturel $n \geq 0$ donné.
On a alors :

$$\exp((n+1)a) = \underbrace{\exp(na+a) = \exp(na)\exp(a)}_{\text{D'après 2°)}} \underbrace{= (\exp(a))^n\exp(a)}_{\text{d'après l'hypothèse au rang } n} = (\exp(a))^{n+1}$$

Ceci prouve que la propriété est héréditaire pour tout entier $n \geq 0$.
Le résultat en découle.

Exercice 2

1°) **Réponse c)** : En effet $y' - 2y = 4 \Leftrightarrow y' = 2y + 4$ (de la forme $y' = ay + b$)

La solution générale est $y = -\dfrac{b}{a} + Ce^{ax} = -2 + Ce^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

On veut de plus $y(1) = 2$ soit $-2 + Ce^2 = 2$ qui donne $C = 4e^{-2}$.

2°) **Réponse c)** : En effet, si $f(x) = e^{-x} + \dfrac{1}{3}e^{2x}$, alors $f'(x) = -e^{-x} + \dfrac{2}{3}e^{2x}$ et

$f'(x) = -f(x) + e^{2x}$, ce qui prouve que f est solution de $y' = -y + e^{2x}$.

3°) **Réponse b)** : En effet, $z = y - x$ donc $z' = y' - 1$, d'où
$z' + z = y' + y - x - 1 = 0$ puisque $y' + y = x + 1$.

4°) **Réponse b)** : En effet, la solution générale est $y = 3 + Ce^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ (même explication qu'au 1°)) et $\lim\limits_{x \to -\infty}(3 + Ce^{2x}) = 3$ puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$.

Exercice 4

0,75 1°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{2}(\ln x - \dfrac{3}{2}) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2}(x^2 \ln x - \dfrac{3}{2}x^2) = 0$ ($\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln x = 0$ c'est une limite de référence). 0,5 Puisque $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$, 0,25 f est continue en 0.

0,25 2°) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (facile !) 0,25.

1,5 3°) • La limite en 0 de $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ 0,5 $= \dfrac{x}{2}(\ln x - \dfrac{3}{2}) = \dfrac{1}{2}(x \ln x - \dfrac{3}{2}x)$ est égale à 0. 0,25
Ceci prouve que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$ (tangente horizontale).
• Sur $]0;+\infty[$, f est le produit de deux fonctions dérivables. f est donc
0,25 dérivable sur cet intervalle et, pour $x > 0$, $f'(x) = x(\ln x - \dfrac{3}{2}) + \dfrac{x^2}{2}\dfrac{1}{x} = x(\ln x - 1)$. 0,5.

0,75 4°) Sur $]0;+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $\ln x - 1$ et $\ln x - 1 \geq 0$ ssi $x \geq e$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-e^2/4$	↗	$+\infty$

0,25. 2 × 0,25.

2,25 5°) a) Equation de T : $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ soit $y = -x + \dfrac{1}{4}$. 0,5.

b) $h'(x) = f'(x) + 1 = x(\ln x - 1) + 1$ et $h''(x) = (\ln x - 1) + x\dfrac{1}{x} = \ln x$. 2 × 0,25

x	0		1		$+\infty$
$h''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h'(x)$	‖	↘	0	↗	

0,5.

Le tableau de variation de h' montre que $h'(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$ et que $h'(x) = 0$ ssi $x = 1$.
0,25.