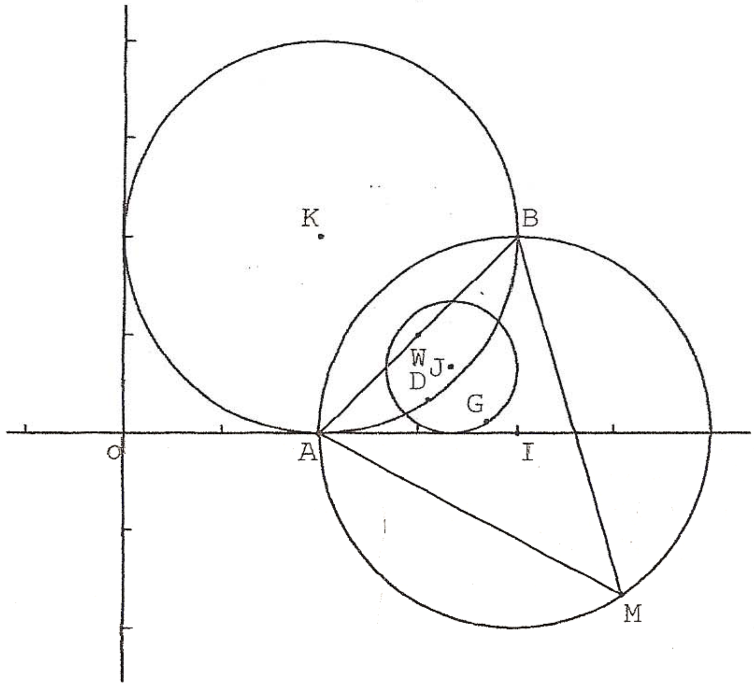
Exercice 1



1. On sait que $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{ID}$.

   (a) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BM}=\left(\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IB}\right)=\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IM}\right)\left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IB}\right)=IB^2-IM^2=0.$
   $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AM}=\left(\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{IB}\right)\left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IA}\right)=\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IM}\right)\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)=IA^2-IM^2=0.$
   On en déduit que $(AD)\perp(BM)$ et $(BD)\perp(AM)$; (AD) et (BD) sont donc deux hauteurs du triangle ABM et D l'orthocentre de ABM.

   (b) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IM}=3\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{ID}$.

2. $f: M(z)\mapsto M'(Z)$ avec $Z=\frac{1}{3}z+2+\frac{2}{3}i$.

   (a) $f(W)=W \iff (1)\ : z=\frac{1}{3}z+2+\frac{2}{3}i \iff z=3+i$; ce qui montre l'existence et l'unicité de W car son affixe $w=3+i$ est l'unique solution de (1).
   $Z-(3+i)=\frac{1}{3}z+2+\frac{2}{3}i-(3+i)=\frac{1}{3}z-\left(1+\frac{1}{3}i\right)=\frac{1}{3}(z-(3+i))$. On en déduit que f est l'homothétie de centre W et de rapport $\frac{1}{3}$.

   (b) Un point H est isobarycentre de A,B,M si et seulement si $\overrightarrow{HM}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{0}$. Montrons que $f(M)$ vérifie cette propriété. On a $z_M-z_{f(M)}+z_A-z_{f(M)}+z_B-z_{f(M)}=0$. On en déduit que l'image par f du point M est l'isobarycentre des points A, B,M, donc d'aprés l'unicité du barycentre $f(M)=G$.

   (c) G étant l'image de M par f , l'ensemble des points G lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon 2 est le cercle de centre $J=f(I)$ d'affixe $\frac{10+2i}{3}$ et de rayon $\frac{2}{3}$.

   (d) D'aprés la question 1. D est l'image de G par l'homothétie de centre I et de rapport 3. On désigne par g cette homothétie. On obtient en écriture complexe $g: z\mapsto z'=3z-8$. D est donc l'image de M par $g\circ f$. On calcule $z"=g\circ f(z)$ et on obtient $z"=z-2+2i$. On en déduit que $g\circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$. L'ensemble cherché est donc l'image du cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon 2 par cette translation ; il s'agit du cercle de centre $K=g\circ f(I)$, d'affixe $k=2+2i$ et de rayon 2.