Correction

N°2

Pour n entier, $n \geq 1$, on a $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n\,!}(2-x)^n e^x\,dx$

1. $I_1 = \int_0^2 (2-x)\,e^x\,dx$

   En posant $u(x) = 2 - x$ et $v'(x) = e^x$ on a $u'(x) = -1$ et $v(x) = e^x$, ces 4 fonctions sont continues sur $[0\,;\,2]$ donc on peut intégrer par parties : $I_1 = [(2-x)e^x]_0^2 + \int_0^2 e^x\,dx = -2 + e^2 - 1 = e^2 - 3$.

2. Sur $[0\,;\,2]$ on a $2 - x \geq 0$ et $e^x \geq 0$ donc $I_n \geq 0$.

   D'autre part, $2 - x \leq 2$ donc $(2-x)^n \leq 2^n$ ainsi $I_n \leq \frac{2^n}{n\,!}\int_0^2 e^x\,dx = \frac{2^n}{n\,!}(e^2 - 1)$.

3. $I_{n+1} = \int_0^2 \frac{1}{(n+1)!}(2-x)^{n+1} e^x\,dx$

   En posant $u(x) = (2-x)^{n+1}$ et $v'(x) = e^x$ on a $u'(x) = -(n+1)(2-x)^n$ et $v(x) = e^x$, ces 4 fonctions sont continues sur $[0\,;\,2]$ donc on peut intégrer par parties :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left([(2-x)^{n+1} e^x]_0^2 - \int_0^2 -(n+1)(2-x)^n e^x\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(-2^{n+1} + \int_0^2 (n+1)(2-x)^n e^x\,dx\right)$$
$$= -\frac{2^{n+1}}{(n+1)\,!} + \int_0^2 \frac{n+1}{(n+1)\,!}(2-x)^n e^x\,dx$$
$$= I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)\,!}.$$

4. Pour $n = 1$, $I_1 = e^2 - 3$ i.e. $e^2 = 3 + I_1 = 1 + \frac{2}{1\,!} + I_1$ qed.

   HR : supposons que, pour un certain naturel n, $e^2 = 1 + \frac{2}{1\,!} + \frac{2^2}{2\,!} + \dots + \frac{2^n}{n\,!} + I_n$. D'après la question précédente, on a alors $e^2 = 1 + \frac{2}{1\,!} + \frac{2^2}{2\,!} + \dots + \frac{2^n}{n\,!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)\,!} + I_{n+1}$ donc l'égalité est vraie au rang $n + 1$.

   Donc l'égalité est vraie pour tout naturel n.

5. Pour n entier, $n \geq 1$, $u_n = \frac{2^n}{n\,!}$.

   a. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)\,!}\frac{n\,!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ ssi $n \geq 3$. Pour tout n on a $u_n > 0$ donc pour $n \geq 3$ on a $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

   b. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 3$ on a $u_n \leq u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.

   Tout d'abord, pour $n = 3$, $u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = u_3 \geq u_3$ qed.

   Puis, (HR) supposons que l'inégalité est vraie pour un certain naturel $n \geq 3$.

   On a $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ donc $u_{n+1} \leq u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-3}$ qed.

   Donc l'inégalité est vraie pour tout naturel $n \geq 3$.

6. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = 0$. De plus on a $0 \leq u_n \leq u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ donc, par le théorème des gendarmes, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.